COMPLEXES

I) Les nombres complexes. Forme algébrique

1°) Définition algébrique

Les nombres complexes sont des nombres de la forme

$$z = x + i\,y$$

Où x et y sont des **nombres réels** et i le nombre dit imaginaire tel que $i^2 = -1$

Remarque: L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Exemples :

$2+3i$; $-1 - i$; $-\frac{1}{2} + 4i$; $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sqrt{2}$; $-5i$; 0

2°) La forme algébrique

L'écriture $x + i\,y$ du nombre complexe z est appelée **la forme algébrique** de z où
x est la partie réelle on note Re(z)= x
y est la partie imaginaire Im(z)= y

Exemple : $z = -5 + 2i$ Re(z)= -5 et Im(z)= 2

Cas particuliers :

- $0 = 0 + 0i$ sa partie réelle et imaginaire sont nulles
- $3 = 3 + 0i$, 3 est un nombre réel sa partie imaginaire est nulle

On a la propriété suivante

$$\boxed{z \in \mathbb{R} \text{ ssi } \operatorname{Im}(z) = 0}$$

- $9i = 0 + 9i$, 9i est **un nombre imaginaire pur** car sa partie réelle est nulle.

On a la propriété suivante

$$\boxed{z \in i\mathbb{R} \text{ ssi } \operatorname{Re}(z) = 0}$$

Remarque importante: **la partie imaginaire d'un nombre complexe est un REEL**
ainsi si $z = 1 + i(1 + 2i)$ alors Re(z) = - 1 et Im(z) = 1

Exercice : Donner la partie réelle et imaginaire des nombres complexes suivants

$z = 1$; $z = -i$, $z = 3i - 2$

Re(z)=1 et Im(z)= 0 Re(z)=0 et Im(z)= -1 Re(z)= -2 et Im(z)= 3

II) Calculs dans C
1°) Egalité de deux complexes

Théorème 1

z = z' ssi Re (z) = Re(z') et Im(z)=Im(z').

Conséquences :

- Tout nombre complexe s'écrit de façon unique $z = x + i\,y$ où x, y sont dans R.
- **$x + i\,y = 0$ ssi $x = 0$ et $y = 0$**

Application :
Déterminer les deux nombres réels a et b tels que le complexe $a + b - 1 + i(a - b)$ soit nul .

2°) Conjugué

Définition

Pour tout nombre complexe z de forme algébrique $x + iy$ le conjugué de z noté $\bar{z}$ est le nombre complexe $\boldsymbol{x - iy}$.

Exemples : Déterminer le complexe conjugué des nombres complexes suivants $2 + i$; -4 ; $3 - 5i$; $\frac{1}{2}$ i ; $\sqrt{3} - 3i$, $i - 2$.

Propriétés du conjugué d'un nombre complexe

1. $\boldsymbol{z \,.\, \bar{z} = x^2 + y^2}$

2. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ $\overline{z . z'} = \bar{z} \,.\, \bar{z}'$

3. $\bar{\bar{z}} = z$

4. $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ **pour tout entier naturel n**

5. $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ avec $z \neq 0$

6. $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}$

7. $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z) = 2x$ et $\boldsymbol{z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z) = 2i\,y}$

REMARQUE :

z dans $\mathbb{R}$ ssi $\overline{z} = z$
z réel

z dans $i\mathbb{R}$ ssi $\overline{z} = -z$
z imaginaire pur

Preuve pour z réel:

$z = x + iy$ avec x et y dans R. z dans R équivaut à $y = 0$

$z = \overline{z}$ équivaut à $x + iy = x - iy$ càd $y = 0$ donc l'équivalence est démontrée

Propriétés du nombre i

- $i^2 = -1$
- $\dfrac{1}{i} = -i$
- Puissances de i : $i^{4n} = 1$
  $i^{4n+1} = i$
  $i^{4n+2} = -1$
  et $i^{4n+3} = -i$ n est un entier naturel

Exemple: On donne $z = (3 - 7i) / (5 + i)$ et $z' = (3 + 7i) / (5 - i)$. Pourquoi peut – on affirmer sans calculs
Que $z + z'$ est un réel et que $z - z'$ est un nombre imaginaire pur ?
car $z' = \bar{z}$

$3 - 7i = \overline{(3 + 7i)}$ et $5 - i = \overline{(5 + i)}$

3°) Opérations dans C

$z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, x', y, y' sont réels.

Addition

$$\boxed{z + z' = (x + x') + i(y + y')}$$

Exemple :

$z = 3 + 4i$ et $z' = 4 - 5i$; $z + z' = 7 - i$

Produit par un réel $\boxed{kz = (kx) + i(ky)}$

Exemple : $2z = 6 + 8i$

Produit $\boxed{z\,z' = (xx' - yy') + i\,(xy' + yx')}$

On effectue les calculs dans C en appliquant les règles de calcul dans R et en remplaçant i^2 par -1.

Exemple : $z = 3+4i$ et $z' = 4-5i$; $z\,z' = 32 + i$

Exemples : Les identités remarquables

$$(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2\,i\,xy$$

$$(x-iy)^2 = x^2 - y^2 - 2\,i\,xy$$

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = (x+i\,y)(x-i\,y) = z \times \bar{z}}$$

Inverse : tout nombre complexe z non nul admet un inverse 1/z

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\,\bar{z}} = \frac{x - iy}{(x-iy)(x+iy)} = \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{-y}{x^2+y^2}}_{\text{forme algébrique}}$$

Exemples : Ecrire sous forme algébrique l'inverse de z

a) $z = 5 - 3i$ b) $z = i$ c) $z = \dfrac{1+i}{3}$

Quotient

$$\frac{z}{z'} = \frac{z\,.\,\bar{z}'}{z'.\,\bar{z}'} = \frac{(x+iy)(x'-iy')}{(x'+iy')(x'-iy')} = \underbrace{\frac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2} + i\,\frac{yx'-xy'}{x'^2+y'^2}}_{\text{forme algébrique}}$$

Exemples :

1) Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants $z_1 = 2 + 3i - (3+5i)$; $z_2 = (2+3i)^2$; $z_3 = \frac{-5+i}{3+2i}$

2) Soit $z = x + i\,y$ et $Z = \frac{z+1}{z-i}$ où $z \neq i$. Donner la forme algébrique de Z en fonction de x et y.

corrigé

1) $z_1 = -1 - 2i$ $z_2 = -5 + 12i$ $z_3 = -1 + i$

$$2)\ Z = \frac{x^2 + y^2 + x - y}{x^2 + (y-1)^2} + i\,\frac{(x - y + 1)}{x^2 + (y-1)^2}$$

.