COMPLEXES
FICHE 3 : complexe et géométrie

I Définition

On munit le plan d'un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) Alors :
On identifie l'ensemble C des nombres complexes au plan P :

Définition pour le point

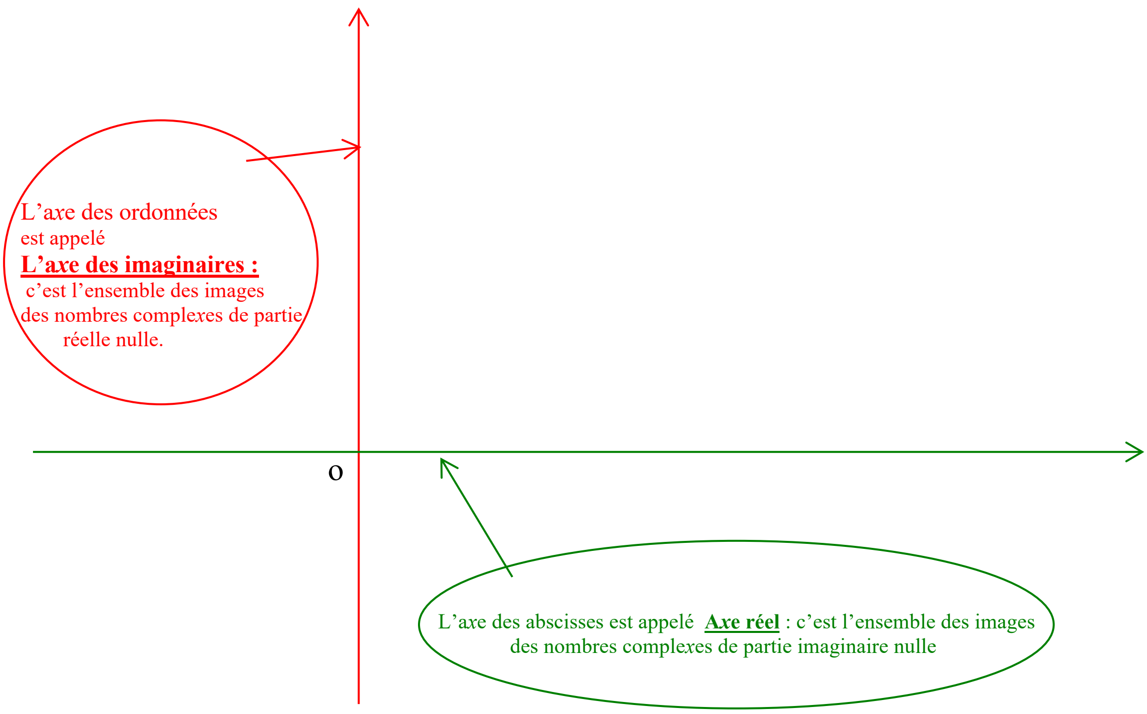
* Le point M(x ; y) est L'IMAGE du complexe $z = x + i\,y$

* Le complexe $z = x + i\,y$ est l'AFFIXE du point M(x ; y)

au complexe $z = x + iy$ on fait correspondre le point M(x ; y)
On note : $z_M = x + i\,y$ et M(z).

Exemples : 2 + 3i est l'affixe du point A (2 ; 3) et du vecteur $\overrightarrow{OA}$ (2 ;3)
. L'image de $z_B = -1 - i$ est le point B (-1 ; -1) et le vecteur $\overrightarrow{OB}$ (-1 ; -1)

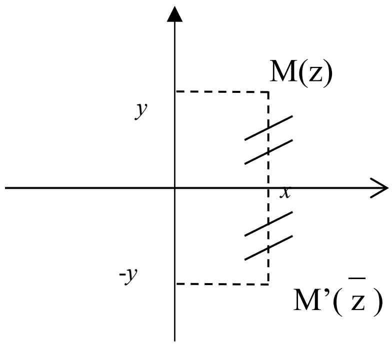
L'abscisse x est la partie réelle du complexe. L'axe des abscisses est aussi **l'axe des réels**
L'ordonnée y est la partie imaginaire du complexe. L'axe des ordonnées est aussi **l'axe des imaginaires**



L'origine O du repère est l'image du nombre complexe 0 = 0 + 0i

<u>Conjugué</u>

Un nombre complexe et son conjugué ont même partie réelle et des parties imaginaires opposées, on en déduit donc que si M(z) et M'(z) **<u>Les points M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses (Ox).</u>**



<u>EXEMPLE :</u> Placer les images des complexes z= 3 – i , z' = -2 + i et les images de leurs conjugués respectifs.

<u>II) Vecteurs</u>

<u>1°) Définition pour le vecteur</u>

*Le vecteur $\overrightarrow{OM}(x ; y)$ est le vecteur IMAGE du complexe $z = x + i\,y$

* Le complexe $z = x + i\,y$ est l'AFFIXE du vecteur $\overrightarrow{OM}(x ; y)$. On note $z_{\overrightarrow{OM}} = x + i\,y$ et $\overrightarrow{OM}$ (z)

<u>2°) Affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$</u>

Soit $\vec{u}$(a;b) un vecteur du plan alors l'affixe de $\vec{u}$ est $z_{\vec{u}}$ = a + ib

Si A(z_A) et B(z_B) alors l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

<u>Exemple</u> : Quel est l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ où A(1+i) et B(4 – 2i)

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 4 - 2i - (1 + i) = 3 - 3\,i$

<u>III) Affixe du milieu et applications</u>

Soit A(z_A) et B(z_B) alors l'affixe du milieu I de [AB] est :

$$z_I = \frac{z_B + z_A}{2}$$

<u>Exemples:</u>

Exercice 1

On donne 3 pts A(4 +2i) , B (1 -3i) et C(-2)

1.Déterminer l'affixe du milieu I de [AC] .

2.En déduire l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme

Correction :

$z_I = 1 + i$; ABCD parallélogramme ssi $(Z_B + z_D)/2 = z_I$ càd t $z_D = 2 + 2\,i - 1 + 3i$

Ce qui donne $z_D = 1 + 5i$

EX 2 Soient A(3 ; 2) B(0 ;-1) C(-2 ;-3) Montrer que les trois points sont alignés.

Correction : $Z_{\overrightarrow{AB}} = -3-3\,i = \frac{3}{5} Z_{\overrightarrow{AC}}$

IV) Module d'un nombre complexe. Argument d'un nombre complexe non nul.

1°) Module

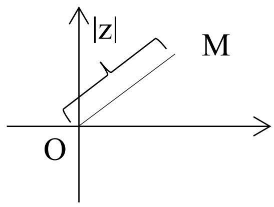
Définition

Si le point M(x ; y) est l'image du nombre complexe $z = x + iy$

Le module de z est la longueur OM c'est – à – dire la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$

On le note | z |. On a donc

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\,\bar{z}} = OM = \|\overrightarrow{OM}\|$$



Exemples :

Déterminer le module de chacun des nombres suivants -3i ; (-2 +5i) ; (11 -7 i) ; (4 +i $\sqrt{3}$)

Corrigé : $|-3i| = 3$ $|-2 + 5i| = \sqrt{29}$ $|11 - 7i| = \sqrt{170}$ $|4 + i\sqrt{3}| = \sqrt{19}$

Propriété

$AB = |z_B - z_A|$ $\|\vec{u}\| = |z_u|$

Preuve : Soit $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ M($z_B - z_A$) $AB = OM = |z_B - z_A|$

Exemple : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (O ; u , v)

Soit les points A(2) ,B(2i) ,C(-2) et D(- i) .

Déterminer AB, BC, CD, AD ;

Corrigé : $AB = |z_B - z_A| = 2\sqrt{2}$ $BC = 2\sqrt{2}$ $CD = \sqrt{5}$ $AD = \sqrt{5}$

Remarque 1: $|z| = 0$ ssi $z = 0$.

en effet $|z| = 0$ équivaut à OM = 0 soit O et M confondus càd z =0

Remarque 2 : $|z| = z$ ssi z est un réel positif

2°) Argument d'un nombre complexe non nul

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct (O ; u , v) .

On choisit un point M du plan complexe distinct de l'origine **d'affixe z non nul**.

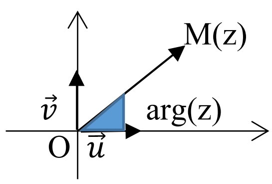
Définition

Soit z un nombre complexe **non nul**.

Un **ARGUMENT de z est une MESURE** en radians de l'angle $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM})$

Et on écrit

$$\mathrm{Arg}(z) = (\vec{u} ; \overrightarrow{OM}) + k\,2\pi \text{ , k dans Z ou } \mathrm{Arg}(z) = (\vec{u} ; \overrightarrow{OM})\ (2\pi)$$



Exercice: Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (O ; u , v)

Soit les points A(2) ,B(2i) ,C(-2) et D(- i) .

Déterminer un argument de l'affixe de chacun des points A, B, C et D.

Corrigé : 0 ; $\pi/2$; π ; $-\pi/2$

3°) Calculs avec la forme trigonométrique
Propriétés du module et de l'argument

1. $|z| = |-z|$ et arg (- z) =arg z + π (2π)
2. $|z| = |\bar{z}|$ et arg($\bar{z}$) = -arg(z) (2π)
3. $|z.z'| = |z|.|z'|$ et arg(z.z') = arg z + arg z' (2π)
4. $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et arg ($\frac{1}{z}$) = - arg(z) (2π)
5. $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ et arg($\frac{z}{z'}$) = arg(z) - arg(z') (2π)
6. $|z^n| = |z|^n$ n dans Z et arg z^n = n arg z (2 π) pour tout entier n

Preuves voir livre p

(module) (valeur absolue)

Exemples : | i | = 1 | *x* | = | *x* | si *x* dans R

Inégalité triangulaire

$$\boxed{|z + z'| \leq |z| + |z'|}$$

Propriétés importantes de l'argument

1. z dans R* ssi arg z = 0 (z dans R^{+*}) ou arg z = π (z dans R^{-*})
2. z dans iR* ssi arg z = π/2 (z dans iR^{+*}) ou arg z = -π/2 (z dans iR^{-*})

Egalité de deux nombres complexes non nuls

soit z et z' deux nombres complexes non nuls

z = z' ssi |z| =| z'| et arg z = arg z' (2π)

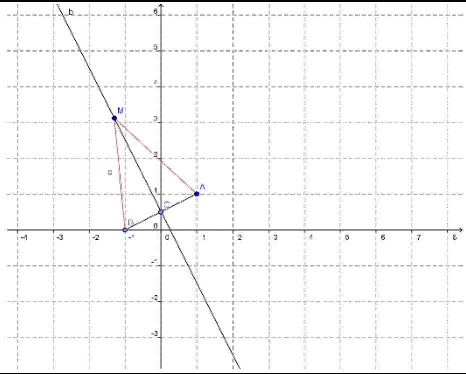
ENSEMBLES DE POINTS AVEC LES MODULES :

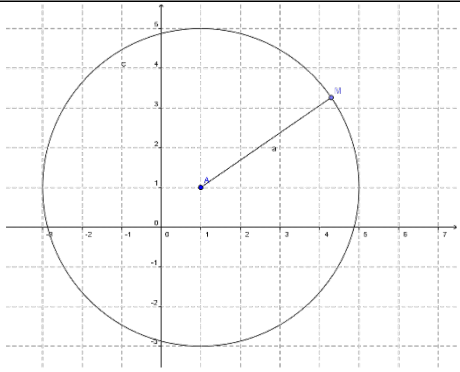
Exemple 1 : $| Z - Z_A | = | Z - Z_B |$ c'est la médiatrice de [AB] car cela équivaut à AM = MB
Déterminer l'ensemble des points M (z) tels que |z – 1 – i | = | z + 1|

Si A(1 + i) et B(-1) alors l'ensemble cherché est la médiatrice de [AB].

Exemple 2 : $| Z - Z_A | = r$ c'est le cercle C(A ; r) car cela équivaut à AM = r .
Déterminer l'ensemble des points M (z) tels que |z – 1 – i | = 4

Si A(1 + i) alors l'ensemble cherché est le cercle C(A (1 + i) ; 4)

1 

2. 

4°) INTERPRETATION GEOMETRIQUE DE l'ARGUMENT

1. Pour tous points distincts A et B :

$$\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) \ (2\pi)$$

2. Pour tous points distincts A, B, C et D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$

$$\arg \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \ (2\pi)$$

MEMO –TECHNIQUE : ON COMMENCE TOUJOURS PAR LE DERNIER.

Exemples importants: $A \neq B$ et $A \neq C$

1. A,B et C alignés ssi

$$\arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 0 \ (\pi)$$

2. $(AB) \perp (AC)$ ssi

$$\arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pi/2 \ (\pi)$$

5°) Etude d'un exemple : Triangle équilatéral

Soit A(i), B(2+i) et C (1 + i ($\sqrt{3}$+1)). Démontrer que le triangle ABC est équilatéral

Corrigé : il y a deux méthodes

Méthode 1 : on calcule les longueurs AB, BC et AC à l'aide du module et on démontre qu'elles sont toutes égales $AB = |z_B - z_A| = 2 = BC = AC$

Méthode 2 : On calcule AB et AC puis $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \arg \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \pi/3 \ (2\pi)$