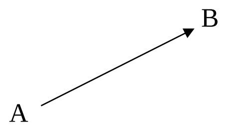
Vecteurs du plan

I) Définition et propriétés

1°) Définition

A et B sont deux points distincts du plan. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour :

- DIRECTION, la direction de la droite (AB)
- SENS, le sens de A vers B
- NORME, la longueur AB



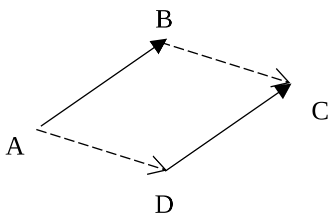
Remarque : Si A et B sont confondus $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$, le vecteur NUL

Le point A est **l'origine** du vecteur et le point B **l'extrémité**.

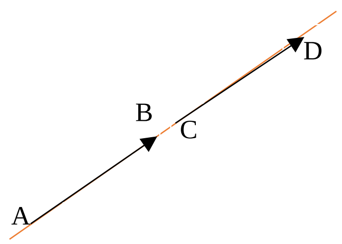
2°) Propriété d'égalité

ABCD est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ **OU** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

Cas général : C n'appartient pas à (AB).



Cas partiulier : C appartient à (AB)



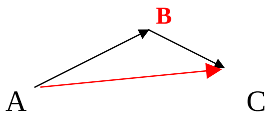
De plus

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si ces vecteurs ont même direction, même sens et même norm

II) Opérations sur les vecteurs

1°) Sommes de vecteurs

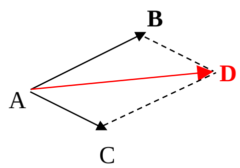
- **Addition : la relation de Chasles**



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

- **Règle du parallélogramme**

A, B et C sont trois points. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ ssi ABDC est un parallélogramme.



- $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont OPPOSES (même direction, même norme, mais de sens contraire)

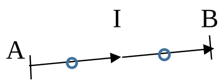
2°) Multipication d'un vecteur par un réel

Règles de calcul

Pour tous réels k, k' et tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

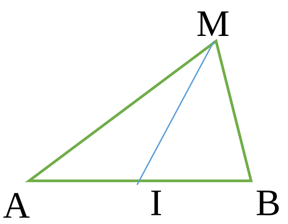
REGLE 1 : $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\,\vec{u} + k\vec{v}$
REGLE 2 : $k(\,k'\vec{u}) = (\,kk')\,\vec{u}$
REGLE 3 : $(k + k')\vec{u} = k\,\vec{u} + k'\vec{u}$
REGLE 4 : $k\vec{u} = \vec{0}$ équivaut à $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

3°) Caractérisation du milieu



I est le milieu de [AB] ssi $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Exercice : A l'aide de la relation de Chasles montrer que pour tout point M du plan
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MI}$ sachant que I est le milieu de [AB]



$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = 2\,\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\,\overrightarrow{MI}$$

Grâce à la relation de Chasles on introduit le point I

4°) Caractérisation du centre de gravité d'un triangle

Soit ABC un triangle quelconque. A',B' et C' sont les milieux respectifs des côtés [BC] [AC] et [AB] .

G est le centre de gravité du triangle ABC (c'est-à-dire le point d'intersection des médianes) ssi

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Exercice : 1°)A l'aide de la relation de Chasles montrer que pour tout point M du plan
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

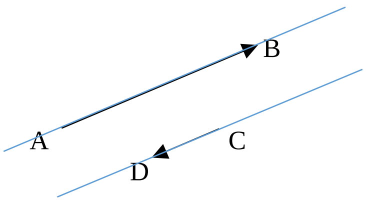
2°) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$

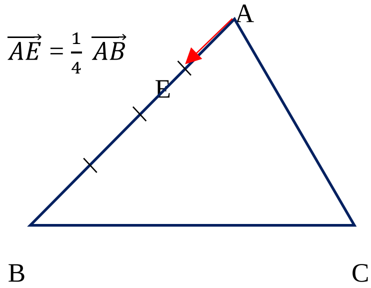
On montre de même que $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$

5°) Colinéarité de deux vecteurs et conséquences importantes
Définition

On dit que deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **COLINEAIRES** s'ils ont **LA MEME DIRECTION**
C'est-à-dire si (AB) // (CD).

Ces deux vecteurs sont colinéaires





$\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

Théorème

Etant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ NON NULS .

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **COLINEAIRES** ssi il existe un réel k non nul tel que $\boldsymbol{\vec{u} = k\vec{v}}$

CONSEQUENCES

1- **Parallélisme**

Propriété

(AB)//(CD) SSI il existe un nombre k non nul tel que $\overrightarrow{AB}$ = k $\overrightarrow{CD}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires

2- **Alignement**

Propriété

Les points **A,B et C sont alignés** SSI il existe un nombre k non nul tel que $\overrightarrow{AB}$ = k $\overrightarrow{AC}$ c'est-à-dire **$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires**

III) Vecteurs dans un repère

1°) Coordonnées et norme d'un vecteur

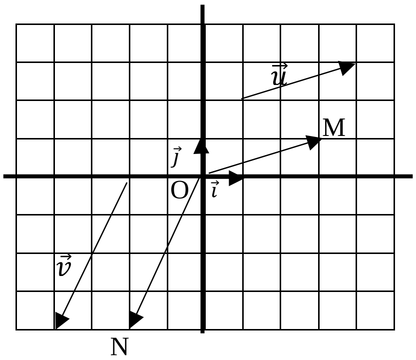
Remarque : On notera désormais le repère (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) au lieu de (O ; I , J)

Définition

Dans le repère (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$)
Soit $\vec{u}$ un vecteur et M le point de coordonnées (x ; y) qui est l'unique point du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

On dit alors que le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées (x ; y) et on note $\vec{u}\binom{x}{y}$ ou $\vec{u}$ (x ; y) .
La norme du vecteur $\vec{u}$ **est la longueur du** vecteur $\vec{u}$ **et on note** $||\vec{u}||$
Dans un repère orthonormé on a $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Exemple :



Dans le repère ci- contre M (3 ; 1) et N(-2 ; -4)

$\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ donc $\vec{u}$ (3 ; 1) ou $\vec{u}\binom{3}{1}$

$\overrightarrow{ON} = \vec{v}$ donc $\vec{v}$ (-2 ; -4) ou $\vec{v}\binom{-2}{-4}$

Propriété 1

Soit $\vec{u}$ (x ; y) et $\vec{v}$ (x'; y'). $\vec{u} = \vec{v}$ **équivaut à** $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

Deux vecteurs sont égaux ssi leurs coordonnées sont égales.

Propriété 2

Si $\vec{u}$ (x ; y) et $\vec{v}$ (x' ; y') alors $\boldsymbol{\vec{u} + \vec{v}}$ **(x + x' ; y + y')**
k $\boldsymbol{\vec{u}}$ (kx ; ky)

2°) Coordonnées et norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Propriété

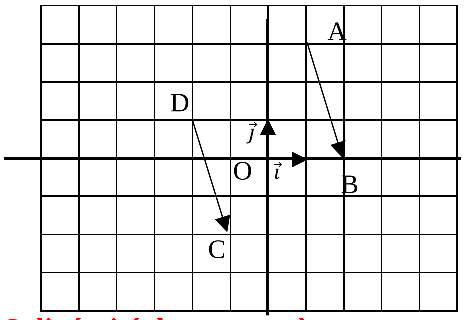
Dans un repère si A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) sont deux points alors on a $\overrightarrow{AB}$ ($x_B - x_A$; $y_B - y_A$)

Exercice

Dans un repère on donne les points A(1 ; 3) , B(2 ; 0) et C(-1 ; -2) .

1°) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

2°) Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.



$\overrightarrow{AB}$ ($x_B - x_A$; $y_B - y_A$) donc $\overrightarrow{AB}$ (2 - 1 ; 0 – 3)

Soit encore $\overrightarrow{AB}$ (1 ; –3).

On pose D (x_D ; y_D) or ABCD est un parallélogramme ssi

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ c'est-à-dire

$\begin{cases} x_C - x_D = 1 \\ y_C - y_D = -3 \end{cases}$ soit $\begin{cases} -1 - x_D = 1 \\ -2 - y_D = -3 \end{cases}$ on trouve D(-2 ; 1)

3°) Colinéarité dans un repère

Théorème

$\vec{u}$ **(x ; y) et** $\vec{v}$ **(x' ; y')** sont **COLINEAIRES** SSI

$$\mathbf{Det}\ (\vec{u}\,;\vec{v}\,) = xy' - yx' = 0$$

x	x'
y	y'

Exemples : Les vecteurs $\vec{u}$ (2 ;-5) et $\vec{v}$ (-8 ; 20) sont colinéaires car 2x20 - (-8) x (-5) = 40-40 = 0

Les vecteurs $\vec{u}$ (-3 ;4) et $\vec{v}$ (5 ; 2) ne sont pas colinéaires car -3 x 2 - 4 x 5 = -26

Exercice

Dans un repère on donne les points A(2 ; 1) , B(3 ; -1) C(-2 ; -2) D(-4 ;2).

1°) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du vecteur $\overrightarrow{CD}$

2°) Montrer que (AB) // (CD) .

4°) Equation Cartésienne d'une droite

a. Vecteur directeur d'une droite

Définition

(D) est une droite, A et B sont 2 points de (D).

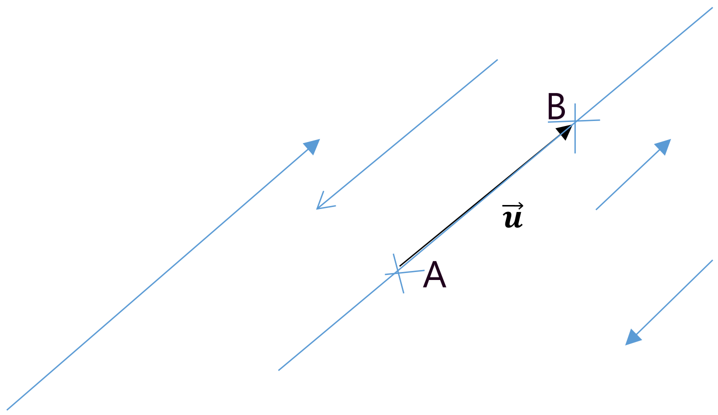
On appelle **vecteur directeur** de (D) tout vecteur non nul $\vec{u}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Autrement dit, le vecteur $\vec{u}$ donne la direction de la droite (D).

Remarques :

• Tous les vecteurs non nuls colinéaires à $\vec{u}$ sont aussi vecteurs directeurs de (D) : il existe donc une infinité de vecteurs directeurs d'une droite, tous colinéaires entre eux.

• **Deux droites parallèles ont des vecteurs directeurs colinéaires.**



Propriété caractéristique :

La droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires.

Propriété et définition

Le plan est rapporté à un repère .Soit a, b , et c , 3 réels tels que (a ; b)≠ (0 ; 0) .
L'ensemble d des points de coordonnées (x ; y) vérifiant :

$$ax + by + c = 0$$

est une droite dont un vecteur directeur est $\vec{u}\ \binom{-b}{a}$.

Il s'agit de l'équation cartésienne de la droite d.

CONSEQUENCE

Si **y = mx + p** est l'équation réduite d'une droite d alors $\vec{u}\ \binom{1}{m}$ **est un vecteur directeur de d.**

Exemples :

1°) Soit la droite d d'équation réduite y = 2x + 3 . Déterminer un vecteur directeur de d.

Corrigé

m = 2 donc $\vec{u}\ \binom{1}{2}$

2°) Soit la droite d d'équation réduite y = -4x + 7 . Déterminer une équation cartésienne de d.

Corrigé : 4x +y - 7 = 0

2°) Soit la droite d passant par le point A(1 ; 4) et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\ \binom{2}{3}$. Déterminer une équation cartésienne de d.

Corrigé :

Méthode 1 : $\vec{u}\ \binom{2}{3}$ est un vecteur directeur de d donc b= - 2 et a = 3 , et d a une équation de la forme

3x - 2 y + c = 0 . Comme A (1 ;4) est un point de d ses coordonnées vérifient l'équation et on a
3.1 - 2 .4 + c = 0 . soit c = 5 d'où d :3x - 2 y + 5 = 0

Méthode 2 : M(x ; y) ∈ d ssi $\overrightarrow{AM}\ \binom{x-1}{y-4}$ **et** $\vec{u}\ \binom{2}{3}$ sont colinéaires càd ssi det($\overrightarrow{AM}$; $\vec{u}$) = 0
Ce qui donne 3(x – 1) – 2(y – 4) = 0 soit d :3x - 2 y + 5 = 0

3°) Soit d : 4x + 2y - 5 = 0. Déterminer l'équation réduite de d.

Corrigé : $y = -2x + \frac{5}{2}$

Remarque : une droite n'a qu'une équation réduite mais une infinité d'équations cartésiennes.