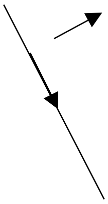
# Applications du produit scalaire



## 1°) Droite et vecteur normal

### Définition

Un vecteur normal à une droite (d) est un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de (d)

**Propriété**

Soit d la droite d'équation cartésienne **a*x* + by +c =0 .**

**Le vecteur $\vec{n}$ $\binom{a}{b}$ est un vecteur normal de d**

**Exemple :** La droite d'équation cartésienne 3*x* - 4y + 5 =0 admet pour vecteur normal $\vec{n}$ $\binom{3}{-4}$

### Caractérisation d'une droite

La **droite** passant **par A** et de vecteur **normal $\vec{n}$** est **l'ensemble des points M** tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

## Exemple :

**Donner une équation de la droite passant par A(-1 ;2) et de vecteur normal $\vec{n}$ (3 ;-1)**

Méthode 1 : M( x ;y) point de D ; AM .n = 0 équivaut à 3( x + 1) - ( y – 2 ) = 0

Soit 3x-y+5 = 0

Méthode 2 : D : 3x – y + c = 0 on trouve c en remplaçant x et y par les coordonnées de A

Soit -3 – 2 + c =0 ce qui donne c = 5.

**Propriété**

Deux droites sont orthogonales ssi le produit scalaire de deux de leurs vecteurs normaux est nul

Ou le produit scalaire de deux de leurs vecteurs directeurs est nul.

**Exemples :**

**1)Ecrire une équation de la droite (d) passant par A(3 ;-4) et orthogonale à la droite (Δ) :2*x*+*y*-1=0.**

Un vecteur normal de Δ , n( 2 ; 1 ) est un vecteur directeur de d

( On rappelle que si d : ax + by +c = 0 alors u(-b ;a)

Est un vecteur directeur de d ) donc d : x – 2y + c = 0 . A point de d donc c = -11.

**2)Les droites (d) :2*x*+3*y*-1=0 et (d') : 3*x* -2*y* + 4 =0 sont-elles orthogonales ?**

$\vec{n}.\vec{n}'$ = 0 donc d et d' orthogonales.

3) On considère la droite d : $\boldsymbol{x -3y + 3 = 0}$ **et le point A** ( 2 ;5). Soit H le projeté orthogonal de A sur d. Déterminer les coordonnées de H .

Corrigé : On détermine d'abord la droite perpendiculaire à d passant par A soit d' : $3x + y - 11 = 0$
Puis on résout le système :

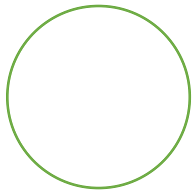
$$\begin{cases} \boldsymbol{x - 3y + 3 = 0} \\ 3x + y - 11 = 0 \end{cases}$$

On trouve H( 3 ; 2 )

## 2°) Cercles

$IM^2 = r^2$ soit dans un repère orthonormal si M($x$ ;y) et I(a ;b) :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$



qui est une équation du cercle C( I ; r).En développant elle s'écrit aussi :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

**EXEMPLES :** 1) Ecrire une équation du cercle de centre I(a ;b) et de rayon r.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a= 2 | b= 3 | r = 4 | $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$ |
| a=-5 | b= 0 | r= 7 | $(x + 5)^2 + y^2 = 49$ |

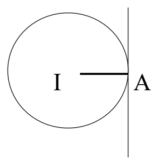
2) Déterminer l'ensemble de points M($x$ ;y) tels que : $x^2 + y^2 - x - 3y = 10$

$(x - ½)^2 + (y - 3/2)^2 = 10 + ¼ + 9/4 = 25/2$ . C( I ( ½ ;3/2) ; $5\sqrt{2}/2$)

**Remarque : Pour faire apparaître la forme $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ on utilise la forme canonique.**

### c)Droites et cercles :tangentes

**Définition** Soit C un cercle de centre I et $T_A$ la tangente à ce cercle au point A. Alors : ( IA) et $T_A$ sont perpendiculaires en A.




**Exemple** : Soit C(I(1 ;-4) ; 5 ) et A( 5 ; -1).
1) Donner une équation de C.
2) Montrer que A est un point du cercle C. Donner une équation de la tangente T en A.

## 3°) Ensemble de points

# Formule de la médiane

Soit ABC un triangle et I le milieu du segment $[BC]$

$$MA^2 - MB^2 = 2\,\overrightarrow{IM}\,.\,\overrightarrow{AB}$$

$$MA^2 + MB^2 = 2\,IM^2 + \tfrac{1}{2}\,AB^2$$

$$\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = IM^2 - IA^2$$

Preuve : on utilise le produit scalaire

**THEOREME**

Soient A et B deux points distincts. L'ensemble des points M du plan vérifiant : $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre [AB].

Preuve : $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = 0$ **équivaut donc à** $IM^2 - IA^2 = 0$ càd puisque $IM \geq 0$ et $IA \geq 0$ cela équivaut à $IM = IA = \frac{AB}{2}$

C'est le cercle de centre I et de rayon IA càd le cercle de diamètre $[AB]$

**Exemple dans un repère orthonormal**

on a les points A( -1 ;2) et B( 2 ; 5).

Déterminer une équation de l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$,ensemble dont on précisera la nature et les éléments caractéristiques.

$(x + 1).(x - 2) + (y - 2).(y - 5) = 0$

$x^2 + y^2 - x - 7y + 8 = 0$   $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - 7/2)^2 = 9/2$ c'est le cercle $C$ ( I(1/2 ; 7/2) ; $3\sqrt{2}/2$)

$$\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = k$$

A et B sont deux points distincts du plan , k un réel donné.

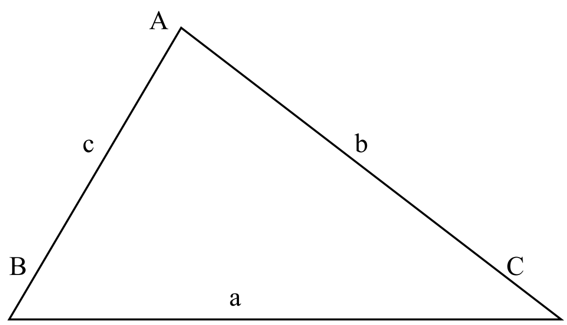
L'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = k$ est un cercle, un point ou l'ensemble vide.

Exercice corrigé 7 p235

## 4°) Formule d'Al- Kashi

Soit ABC un triangle quelconque . Si BC = a , AC = b , AB = c :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cos B$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C$



**Preuve :** $BC^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$

Application :Soit IJK un triangle tel que IJ = 5 JK = 6 et IK = 8 Donner une valeur approchée en degré de l'angle JIK

Corrigé : 49°

**Remarque** : Si l'un des angles est droit on retrouve le théorème de Pythagore.
Par exemple si le triangle est rectangle en A on a $a^2 = b^2 + c^2$.

**Surface d'un triangle**

| |
|---|
| $S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$ . |

**Propriété ou loi des sinus**

$$\frac{2S}{abc} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$