CONTROLE DE MATHS 15 MN N° 5 SA CORRIGE

1- Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes définies sur R :

a) $f(x) = 7x^4 - 8x^3 + 9$

$f(x) = x^4\left(7 - \frac{8}{x} + \frac{9}{x^4}\right)$

comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{8}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{9}{x^4} = 0$

par somme

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(6 - \frac{7}{x} + \frac{8}{x^4}\right) = 6$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$

d'où par produit

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) $g(x) = \dfrac{7-x^3}{1+\frac{4}{\sqrt{x}}}$

comme

$\lim\limits_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{x}} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{4}{\sqrt{x}} = 1$

Par quotient

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

2 - Soit f la fonction définie par $f(x) = 3 + \frac{9+x}{x^2-16}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f .

Il faut que $x^2 - 16 \neq 0$ donc

Df = R\{-4 ;4}

b) Calculer les limites à droite et à gauche en 4 de f. Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat ?

Méthode : On utilise le signe du trinôme

$\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}} 9 + x = 13$

$\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}} x^2 - 16 = 0^+$

Par quotient

$\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to4\\x<4}} 9 + x = 13$

$\lim\limits_{\substack{x\to4\\x<4}} x^2 - 16 = 0^-$

Par quotient

$\lim\limits_{\substack{x\to4\\x<4}} f(x) = -\infty$

La droite d’équation $x = 4$ est asymptote verticale à la courbe.

c) Montrer que la courbe C de f admet au voisinage de +∞ et une asymptote horizontale dont on donnera l’équation réduite.

On a une indéterminée $\infty - \infty$

$$f(x) = 3 + \frac{\frac{9}{x} + 1}{x(1 - \frac{16}{x^2})}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{9}{x} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{9}{x} + 1 = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{16}{x^2} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{16}{x^2} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

Par produit

$\lim\limits_{x \to +\infty} x(1 - \frac{16}{x^2}) = +\infty$

Par quotient

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{9}{x}+1}{x(1-\frac{16}{x^2})} = 0$

Et par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

La droite d’équation y= 3 est asymptote horizontale à la courbe au voisinage de +∞ et de -∞.