CONTROLE DE MATHS TERMINALE SPECIALITE 1 H corrige

Exercice 1 (5 points)

a)F (x) = $-x^2 + 5x$ + C, C ds R

b) G (x) = $-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}$ + C , C ds. R

c) H (x) = $\frac{1}{3}x^3 + \sqrt{x} + e^x$ + C , C ds R

d) i(x) = $\frac{(x^2+2x+3)^3}{3}$ + C , C ds R

e) p(x) = $\frac{(\ln x)^2}{2}$ + C , C ds R

Exercice 2 (7 points)

1. g somme de produits de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :
   $g'(x) = 2\ln x + 2x \times \frac{1}{x} + 1 = 2\ln x + 3 = h(x)$.

2. Sur $]0\,;\,+\infty[$, $\quad 2\ln x + 3 > 0 \iff 2\ln x > -3 \iff \ln x > -\frac{3}{2}$ et par croissance de la fonction exponentielle $x > e^{-\frac{3}{2}}$.
   Donc $S = \left]e^{-\frac{3}{2}}\,;\,+\infty\right[$.

3. Déterminer les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$. On sait que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -1$.
   D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

4. On a vu que sur $\left]e^{-\frac{3}{2}}\,;\,+\infty\right[$, $g'(x) > 0$, donc g est croissante sur cet intervalle.
   On montre de même que sur $\left]0\,;\,e^{-\frac{3}{2}}\right[$, $g'(x) < 0$, donc g est décroissante sur cet intervalle.
   D'où le tableau de variations suivant :

x	0		$e^{-\frac{3}{2}}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$			
	-1	$\searrow$	$-2e^{-\frac{3}{2}} - 1$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5. Le tableau de variations montre que sur $]0\,;\,1[$, on a $g(x) < 0$ et sur $]1\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$.

5.

a. On a $f(x) = x(x\ln x - 1) + 1$. Donc comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, on obtient par produit de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b. On a $f'(x) = 2x\ln x + x^2 \times \frac{1}{x} - 1 = 2x\ln x + x - 1 = g(x)$.
Le signe de $f'(x)$ est donc celui de g vu à la question 5 de la partie B. Donc :

c. $f'(x) < 0$ sur $]0\,;\,1[$, donc f est décroissante sur cet intervalle et $f'(x) > 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$, donc f est croissante sur cet intervalle.

x	0		1		$+\infty$
f(x)	‖	-	0	+	
f '(x)	‖ 1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 3 (8 points)

1. $\overrightarrow{AB}(1;-1;-1)$ et $\overrightarrow{AC}(2;-5;-3)$
   $\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{-1}{-5}$: les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires.
   Par conséquent les points A, B et C ne sont pas alignés (et définissent alors un plan).

2. **a.** $\overrightarrow{AB}.\vec{u} = 2+1-3=0$ et $\overrightarrow{AC}.\vec{u} = 4+5-9=0$
   Le vecteur $\vec{u}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : c'est un vecteur normal au plan (ABC).
   La droite Δ est par conséquent orthogonale au plan (ABC).

   b. Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc de la forme $2x-y+3z+d=0$.
   Le point $A(0;4;1)$ appartient au plan (ABC).
   Donc $0-4+3+d=0 \Leftrightarrow d=1$.
   Ainsi une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x-y+3z+1=0$.

   c. La droite Δ passe par le point $D(7;-1;4)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(2;-1;3)$.
   Une représentation paramétrique de la droite Δ est donc :
   $$\begin{cases} x = 7+2t \\ y = -1-t \\ z = 4+3t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

d. Les coordonnées du point H sont solution du système :

$$\begin{cases} x = 7+2t \\ y = -1-t \\ z = 4+3t \\ 2x-y+3z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7+2t \\ y = -1-t \\ z = 4+3t \\ 2(7+2t)-(-1-t)+3(4+3t)+1=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7+2t \\ y = -1-t \\ z = 4+3t \\ 14+4t+1+t+12+9t+1=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7+2t \\ y = -1-t \\ z = 4+3t \\ 28+14t=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7+2t \\ y = -1-t \\ z = 4+3t \\ t=-2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = -2 \\ t=-2 \end{cases}$$

Donc $H(3;1;-2)$.

3. a) Le point H est le projeté orthogonal du point D sur (ABC).
   b) La distance du point D au plan (ABC) est donc la distance DH = $\sqrt{16+4+36}$ = $2\sqrt{14}$.