| NOM : |
|---|

## CONTROLE N°2 DE MATHS 1 H T SPE SB

### Exercice 1 ( 6 points )

*Dans les questions suivantes* ***entourer la solution exacte*** *parmi celles proposées.*

1 - $\lim\limits_{n\to+\infty} n + 9n^2 - 7n^5 + 2000000$

| | | | |
|---|---|---|---|
| n | $+\infty$ | 100000 | $-\infty$ |

2 - $\lim\limits_{n\to+\infty} n^9 - 2000n^4 + n$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $-\infty$ | $+\infty$ | ? | -2000 |

3 - $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{17n^4 + n + 27n^5}{n^4 + 9n^5 + 2023}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 17 | $+\infty$ | 3 | 0 |

4 - $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{107}{2n} + \frac{1}{n^5} + 20n^3 + 1009n^5$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $-\infty$ | $+\infty$ | 1009 | 0 |

5 - $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - \frac{13}{7n} + \frac{1}{9n^4}) \times (23 + \sqrt{n} + \frac{5}{8n})$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $-\infty$ | $+\infty$ | 23 | $\sqrt{n}$ |

6 - $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 - \frac{4}{83n} + \frac{12}{5n^2}}{\frac{144}{25} - \frac{237}{n^5}}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $-\infty$ | $\frac{25}{144}$ | $\frac{5}{12}$ | 0 |

### Exercice 2 ( 7 points )

1°) On a une indéterminée $+\infty - \infty$ .

$U_n = 10^n - 8^n = 10^n(1 - \frac{8^n}{10^n}) = 10^n\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$

Comme $-1 < \frac{4}{5} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right) = 1$ par somme.

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} 10^n = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

2°) Soit la suite (Vn ) définie pour tout n de N* par $V_n = \frac{5\cos(n)}{n} + 4$

a) Pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}^*$ , $-1 \leq \cos(n) \leq 1$

Comme 5 >0 on a donc pour tout n de $\mathbb{N}^*$

$-5 \leq 5\cos(n) \leq 5$ soit encore comme n> 0

$\frac{-5}{n} \leq \frac{5\cos n}{n} \leq \frac{5}{n}$ et finalement

Soit $\frac{-5}{n} + 4 \leq \frac{5\cos(n)}{n} + 4 \leq \frac{5}{n} + 4$

b) (cos(n)) est une suite divergente. On va donc utiliser le théorème des gendarmes.

pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $\frac{-5}{n} + 4 \leq V_n \leq \frac{5}{n} + 4$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-5}{n} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 - \frac{5}{n} = 4$

De même $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 + \frac{5}{n} = 4$

Alors d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 4$ .

3°) Soit $W_n = \frac{n^2 - 7}{n^3 + 6}$ . Déterminer la limite de ( $W_n$ )

On a une indéterminée du type ∞ / ∞ .
On lève l'indéterminée en factorisant par le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur

$$W_n = \frac{n^2(1-\frac{7}{n^2})}{n^3(1+\frac{6}{n^3})} = \frac{1-\frac{7}{n^2}}{n(1+\frac{6}{n^3})}$$

comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-7}{n^2} = 0$ alors par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{7}{n^2} = 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{6}{n^3} = 0$ alors par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{6}{n^3} = 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

Donc
Par produit
$\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1 + \frac{6}{n^3}\right) = +\infty$

D'où
Par quotient

$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$

**Exercice 3 ( 7 points )**

On considère la suite ( $U_n$) définie par $U_0 = 5$ et pour tout entier naturel n ,
$U_{n+1} = \frac{2}{9} U_n + 7$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < U_n < \boldsymbol{U_{n+1}} \leq 9$

*Initialisation* : pour n=0 on a $U_0 = 5$ et $U_1 = 73/9$
$0 < 5 < \frac{73}{9} \leq 9$ donc $0 < U_0 < U_1 \leq 9$ et $P_0$ est vraie

*Hérédité* : On suppose que la propriété est vraie **pour un entier n** fixé c'est-à-dire
$0 < U_n \leq 9$.
Notre objectif est de montrer qu'elle reste vraie au rang n+1 à savoir $0 < U_{n+1} < \boldsymbol{U_{n+2}} \leq 9$
.

Par hypothèse de récurrence on a $0 < U_n < \boldsymbol{U_{n+1}} \leq 9$ donc , comme $\frac{2}{9} > 0$

$$0 < \frac{2}{9} U_n < \frac{2}{9}\boldsymbol{U_{n+1}} \leq 2 \quad \text{soit encore}$$

$$0 < 1 < \frac{2}{9} U_n + 7 < \frac{2}{9}\boldsymbol{U_{n+1}} + 7 \leq 9$$

soit finalement : $0 < \frac{2}{9} U_n + 7 < \frac{2}{9}\boldsymbol{U_{n+1}} + 7 \leq 9$

c'est-à-dire $0 < U_{n+1} < \boldsymbol{U_{n+2}} \leq 9$

et la propriété est vraie au rang n+1.

*Conclusion* : $P_n$ est vraie au rang 0, elle est héréditaire, on a démontré par récurrence que **pour tout entier n** $0 < U_n \leq 9$

**BONUS : *On* considère $S_n = 1 + 4 + ...+ 4^n$ . Déterminer la limite de $S_n$ .**

$\mathbf{S_n} = \frac{1- 4^{n+1}}{1-4} = -\frac{1}{3}( 1 - 4^{n+1})$
Comme 4 >1 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^{n+1} = +\infty$ *et* par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - 4^{n+1} = -\infty$

Puis par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} Sn = +\infty$