CONTROLE N°2 DE MATHS 1 H T SPE SA

Exercice 1 (6 points)

Dans les questions suivantes ***entourer la solution exacte*** *parmi celles proposées.*

1 - $\lim_{n\to+\infty} n + 6n^2 + 9n^8 + 100000$

n	$+\infty$	100000	0

2 - $\lim_{n\to+\infty} -n^7 + 5000n^5 + n$

$-\infty$	$+\infty$	?	5000

3 - $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{16n^3 + n + 20n^4}{n^3 + 10n^4 + 2022}$

0	$+\infty$	16	2

4 - $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + \frac{19}{n^5} + n^2 - 100n^3$

$-\infty$	$+\infty$	-100	0

5 - $\lim_{n\to+\infty} \left(19 - \frac{17}{5n} + \frac{1}{7n^2}\right) \times \left(1 + \sqrt{n} + \frac{3}{n}\right)$

$-\infty$	$+\infty$	0	19

6 - $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1 + \frac{40}{3n} + \frac{11}{9n}}{\frac{121}{9} - \frac{27}{n^6}}$

$-\infty$	0	$\frac{9}{121}$	$\frac{1}{11}$

1°) On a une indéterminée $+\infty - \infty$.

$U_n = 10^n - 4^n = 10^n\left(1 - \frac{4^n}{10^n}\right) = 10^n\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$

Comme $-1 < \frac{2}{5} < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right) = 1$ par somme.

De plus $\lim_{n\to+\infty} 10^n = +\infty$ donc par produit $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

2°) Soit la suite (V_n) définie pour tout n de N* par $V_n = \frac{2\sin(n)}{n} + 3$

a) Pour tout entier naturel n de N^* , $-1 \le \sin(n) \le 1$

Comme 2 >0 on a donc pour tout n de $\mathbb{N}^*$

$$-2 \leq 2\cos(n) \leq 2 \quad \text{soit encore comme } n>0$$

$$\frac{-2}{n} \leq \frac{2\sin(n)}{n} \leq \frac{2}{n} \quad \text{et finalement}$$

$$\text{Soit} \quad \frac{-2}{n} + 3 \leq \frac{2\sin(n)}{n} + 3 \leq \frac{2}{n} + 3$$

b) (cos(n)) est une suite divergente. On va donc utiliser le théorème des gendarmes.

pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $\quad \frac{-2}{n} + 3 \leq V_n \leq \frac{2}{n} + 3$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-2}{n} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{2}{n} + 3 = 3$

De même $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} + 3 = 3$

Alors d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 3$.

3°) Soit $W_n = \dfrac{n^3 - 5}{n^2 + 4}$. Déterminer la limite de (W_n)

On a une indéterminée du type ∞ / ∞ .
On lève l'indéterminée en factorisant par le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur

$$W_n = \frac{n^3(1-\frac{5}{n^3})}{n^2(1+\frac{4}{n^2})} = \frac{n(1-\frac{5}{n^3})}{1+\frac{4}{n^2}}$$

comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-5}{n^3} = 0$ alors par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{5}{n^3} = 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

Donc
Par produit
$\lim\limits_{n\to+\infty} n\ (1 + \frac{6}{n^3}) = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n^2} = 0$ alors par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{4}{n^2} = 1$

D'où
Par quotient

$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$

<u>Exercice 3 (7 points)</u>

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 4$ et pour tout entier naturel n ,
$U_{n+1} = \frac{3}{8} U_n + 5$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < U_n \leq 8$

Initialisation : pour n=0 on a $U_0 = 4$ $U_1 = 73/9$
$0 < 4 < \frac{13}{2} \leq 8$ donc $0 < U_0 < U_1 \leq 8$ et P_0 est vraie

Hérédité : On suppose que la propriété est vraie **pour un entier n** fixé c'est-à-dire
$0 < U_n < \boldsymbol{U_{n+1}} \leq 8$.
Notre objectif est de montrer qu'elle reste vraie au rang n+1 à savoir $0 < U_{n+1} < \boldsymbol{U_{n+2}} \leq 8$.

Par hypothèse de récurrence on a $0 < U_n \leq 8$ donc , comme $\frac{3}{8} > 0$

$0 < \frac{3}{8} U_n < \frac{3}{8}\boldsymbol{U_{n+1}} \leq 3$ soit encore

$0 < 1 < \frac{3}{8} U_n + 5 < \frac{3}{8} U_{n+1} + 5 \leq 8$

soit finalement : $0 < \frac{3}{8} U_n + 5 < \frac{3}{8} U_{n+1} + 5 \leq 8$

c'est-à-dire $0 < U_{n+1} < \boldsymbol{U_{n+2}} \leq 8$
et la propriété est vraie au rang n+1.

Conclusion : P_n est vraie au rang 0, elle est héréditaire, on a démontré par récurrence que **pour tout entier n** $0 < U_n \leq 8$

BONUS : *On* considère $S_n = 1 + 3 + ...+ 3^n$. Déterminer la limite de S_n .

$\mathbf{S_n} = \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = -\frac{1}{2}(1-3^{n+1})$
Comme 3 >1 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^{n+1} = +\infty$ *et* par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-3^{n+1} = -\infty$

Puis par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} Sn = +\infty$