CONTROLE BILAN DE MATHS N°3 Trimestre 1 TERMINALE SPECIALITE DUREE 2 H
CORRIGE

Exercice 1 (7 pts)

1. En 2023 la population a diminué de 16% puis on a ajouté 1000 individus à la fin de l'année donc :
   $U_1 = (1 - \frac{16}{100}) \times U_0 + 1000 = 0{,}84 \times 12500 + 1000 = 11500$
   De la même manière on a
   $U_2 = (1 - \frac{16}{100}) \times U_1 + 1000 = 0{,}84 \times 11500 + 1000 = 10660$

2. La population de poisson diminue de 16 % chaque année et on réintroduit dans le lac 1000 individus à la fin de chaque année, on a donc pour tout n de N:
   $U_{n+1} = (1 - \frac{16}{100}) \times U_n + 1000$ soit $U_{n+1} = 0{,}84\, U_n + 1000$

3. La propriété à démontrer est P_n : $6250 < U_{n+1} \leq U_n$.

Initialisation : pour n=0 on a $U_0 = 20\,000$ et $U_1 = 11500$,or $6250 < 11500 \leq 12500$ donc
$6250 < U_1 \leq U_0$ et P_0 est vraie

Hérédité : On suppose que la propriété est vraie **pour un entier n** fixé c'est-à-dire $6250 < U_{n+1} \leq U_n$.
Notre objectif est de montrer qu'elle reste vraie au rang n+1 c'est-à-dire que $6250 < U_{n+2} \leq U_{n+1}$

Par hypothèse de récurrence on a $6250 < U_{n+1} \leq U_n$ donc , comme 0,84 >0

$$5250 < 0{,}84U_{n+1} \leq 0{,}84\, U_n \quad \text{soit encore}$$

$$6250 < 0{,}9U_{n+1} + 1000 \leq 0{,}9\, U_n + 1000$$

Soit finalement $6250 < U_{n+2} \leq U_{n+1}$
et la propriété est vraie au rang n+1.

Conclusion : P_n est vraie au rang 0, elle est héréditaire, on a démontré par récurrence que
pour tout entier n , $6250 < U_{n+1} \leq U_n$

4. D 'après le 3) pour tout n de N $U_{n+1} \leq U_n$ et $U_n > 6250$
La suite (U_n) est décroissante et minorée par 6250 donc d'après le théorème de convergence des suites monotones (Un) converge .

5.

```
u=12500
for i in range (1, 14):
    u = 0.84*u+1000
print ( u )
```

OU

```
u=12500
for i in range (13):
    u = 0.84*u+1000
print ( u )
```

6. **a)** Pour tout entier naturel n, $V_n = U_n - 6250$ donc

$V_{n+1} = U_{n+1} - 6250 = 0,84\ U_n + 1000 - 6250 = 0,84\ U_n - 5250$

$V_{n+1} = 0,84(U_n - \frac{5250}{0,84})$

$V_{n+1} = 0,84(U_n - 6250)$

$V_{n+1} = 0,84\ V_n$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de premier terme $V_0 = U_0 - 6250 = 6250$.

b) On en déduit que pour tout entier naturel n,

$V_n = 6250(0,84)^n$

Donc , comme $U_n = V_n + 6250$

$U_n = 6250\ (0,84)^n + 6250$

Soit $U_n = 6250(1 + 0,84^n)$

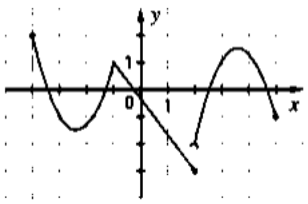
c) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,84^n = 0$ car $-1 < 0,84 < 1$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + 0,84^n = 1$ puis par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 6250$.

La population de poissons baissera régulièrement chaque année jusqu'à se stabiliser autour de 6250 individus.

Exercice 2 (6 pts) QCM : Entourer la bonne réponse

1-

Soit f la fonction définie sur $[-4 ; 5]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe donnée ci-dessous.



f est continue sur :

$[-4; 5]$	$[-4; 1]$	$[2; 5]$	$[0; 5]$

2-

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
$f(x)$	-3	↘	-4	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1

f( ] -∞ ; 2[)=

]-3 ; +∞[	$]-4; +\infty[$	$[+\infty; -3]$	$[-4; +\infty[$

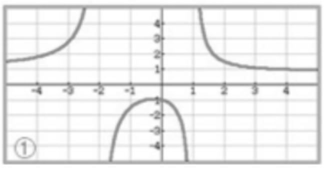
3- Soit f la fonction dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

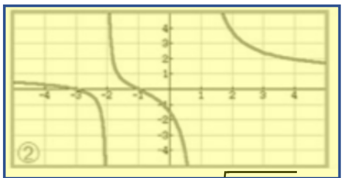
x	$-\infty$		0		4		6
f	0	↗	6	↘	-26	↗	6

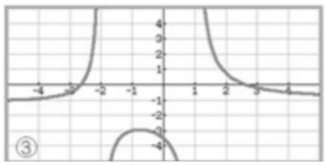
L'équation f(x) =0 admet :

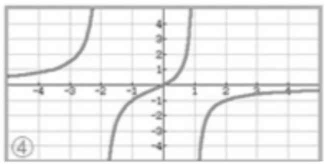
3 solutions	2 solutions	1 solution	0 solution

4-Soit f la fonction définie sur R - $\{-2; 2\}$ par $f(x) = \frac{x^2+4x+3}{x^2+x-2}$. Déterminer la courbe de f .









5- On considère la fonction f(x) = $\sqrt{\frac{9x^2+6}{4x^2+5}}$. La limite de f en $+\infty$ est égale à :

$+\infty$	1.5	$\sqrt{\frac{6}{5}}$	0

6- On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{et} \quad v_n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel n, vérifie $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$.
On peut affirmer que :

a. Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques.

b. La suite (w_n) converge vers 1.

c. La suite (u_n) est minorée par 1.

d. La suite (w_n) est croissante.

Exercice 3 (8 points)

Partie 1

1°)Limites en l'infini

En -∞

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -15x^2 = -\infty\end{array}\right\}$$ Donc par sommes de limites $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty}$

En +∞

On a une indéterminée du type + ∞ - ∞ donc on transforme l'écriture de g(x) et on a :

$$g(x) = x^3(2 - \frac{15}{x} - \frac{4}{x^3})$$

Or

$$\left.\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{15}{x} = 0 \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{4}{x^3} = 0 \text{ soit par somme } \lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \frac{15}{x} - \frac{4}{x^3} = 2\right\}$$ Donc par produit de limites $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$

2°) g est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$g'(x) = 6x^2 - 30x = 6x(x-5)$. Comme a = 6 D'après la règle du signe du trinôme du second degré on en déduit le signe de g'(x), et le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	-129	$\nearrow$	$+\infty$

3°) D'après le tableau de variation sur $]-\infty ; 5]$, -4 est le maximum de g atteint en 0 donc g<-4 sur $]-\infty ; 5]$ c'est-à-dire g<0 sur $]-\infty ;5]$. L'équation g(x) = 0 n'admet donc pas de solution sur $]-\infty;5]$

La fonction g est continue et strictement croissante de l'intervalle, $[5; +\infty[$ à valeurs dans l'intervalle $[-129 ; +\infty[$ qui contient 0, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires relatif aux fonctions strictement monotones l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α dans $[5; +\infty[$.

On en déduit donc que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
Par ailleurs g(7) = - 739 et g(8) = 60 donc g(7) x g(8) < 0 et on a bien 7< α < 8

4°) Comme d'après la calculatrice g (7,53) ≈ -0,597 et que g (7,54) = 0,548 alors

g (7,53) x g (7,54) <0 , on en déduit 7,53 < α < 7,54

5°) On en déduit le signe de g sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	-	

Partie B

1°) a) **Limite à droite en 5**

En $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x>5}} x^3 + 4 = 129 \\[2ex] \lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x>5}} x - 5 = 0^+\end{array}\right\} \text{ donc par quotient } \quad \lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x>5}} f(x) = +\infty$$

b) Graphiquement la droite d'équation $x = 5$ est asymptote verticale à la courbe C.

2°) La fonction f qui est une fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-5) - (x^3+4)}{(x-5)^2} = \frac{3x^3 - 15x^2 - x^3 - 4}{(x-5)^2} = \frac{2x^3 - 15x^2 - 4}{(x-5)^2} = \frac{g(x)}{(x-5)^2}$$

4.D'après le 3. $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-5)^2}$ or $(x-5)^2 > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$ on en déduit que

$f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $]5 ; +\infty[$. On a donc le tableau de variation de f

x	5		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	170,34	$\nearrow$	$+\infty$