CONTROLE N°2 DE MATHS 1 H T SPE SA corrigé

Exercice 1 (6 points)

Dans les questions suivantes ***entourer la solution exacte*** *parmi celles proposées.*

1 - $\lim\limits_{n\to+\infty} \quad - \frac{193}{5n} + \frac{1}{4n^2} + 9$

-193	+ ∞	0	9

2 - $\lim\limits_{n\to+\infty} \quad 10 - 4\sqrt{n} + \frac{30}{n}$

- ∞	+ ∞	10	$\sqrt{n}$

3 - $\lim\limits_{n\to+\infty} \quad \frac{16n^3 + n + 20n^2}{n^2 + 4n^3 + 2022}$

0	+ ∞	4	20

4 - $\lim\limits_{n\to+\infty} \quad - 100n^3 + \frac{1}{n} + \frac{19}{n^5} + n^6$

- ∞	+ ∞	-100	0

5 - $\lim\limits_{n\to+\infty} \; n + 6n^2 - 9n^8 + 200$

- ∞	+ ∞	-3	197

6 - $\lim\limits_{n\to+\infty} \quad \frac{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^n}{1 - \frac{12}{13}}$

- ∞	13	1	0

Exercice 2 (8 points)

1°) $U_n = n^3 + 4n^2 + 4$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^2 + 4 = +\infty$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

2°) Soit $V_n = \frac{n^4 - 3n}{2n^2 + 7}$

On a une indéterminée du type ∞ / ∞ .
On lève l'indéterminée en factorisant par le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur

$$V_n = \frac{n^4(1-\frac{3}{n^3})}{n^2(2+\frac{7}{n^2})} = \frac{n^2\,(1-\frac{3}{n^3})}{2+\frac{7}{n^2}}$$

comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-3}{n^3} = 0$ alors par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{3}{n^3} = 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

Donc

Par produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2(1 - \frac{3}{n^3}) = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7}{n^2} = 0$ alors par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \frac{7}{n^2} = 2$

D'où

Par quotient

$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$

3°) $W_n = 10^n - 13^n = 13^n(\frac{10^n}{13^n} - 1) = 13^n\left(\left(\frac{10}{13}\right)^n - 1\right)$

Comme $-1 < \frac{10}{13} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{10}{13}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \left(\frac{10}{13}\right)^n\right) = 1$ par somme.

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} 13^n = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = +\infty$

4°) Pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}^*$, $-1 \le \sin(n) \le 1$

Comme $3 > 0$ on a donc pour tout n de $\mathbb{N}^*$

$-3 \le 3\sin(n) \le 3$ soit encore comme $n > 0$

$\frac{-1}{n} \le \frac{3\sin(n)+2}{n} \le \frac{5}{n}$ et finalement

Soit $\frac{-1}{n} - 4 \le \frac{3\sin(n)+2}{n} - 4 \le \frac{5}{n} - 4$

b) (cos(n)) est une suite divergente. On va donc utiliser le théorème des gendarmes.

pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $\frac{-1}{n} - 4 \le T_n \le \frac{5}{n} - 4$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} - 4 = -4$

De même $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n} - 4 = -4$

Alors d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = -4$

Exercice 3 (6 points)

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n $U_{n+1} = \frac{4}{5}\sqrt{U_n} + \frac{12}{5}$

Initialisation : pour n=0 on a $U_0 = 1$

$0 < 1 < 4$ donc $0 < U_0 < 4$ et P_0 est vraie

Hérédité : On suppose que la propriété est vraie **pour un entier n** fixé c'est-à-dire
$0 < U_n < 4$
Notre objectif est de montrer qu'elle reste vraie au rang n+1 à savoir $0 < U_{n+1} < \mathbf{4}$.

Par hypothèse de récurrence on a $0 < U_n < 4$
donc , comme la fonction racine carrée est strictement croissante sur R+

$$0 < \sqrt{U_n} < \sqrt{4} \quad \text{soit encore}$$

comme $\frac{4}{5} > 0$

$$0 < \frac{4}{5}\sqrt{U_n} < \frac{8}{5}$$

$$0 < \frac{12}{5} < \frac{4}{5}\sqrt{U_n} + \frac{12}{5} < \frac{8}{5} + \frac{12}{5}$$

soit finalement : $0 < \frac{4}{5}\sqrt{U_n} + \frac{12}{5} < 4$

c'est-à-dire $0 < U_{n+1} < 4$

et la propriété est vraie au rang n+1.

Conclusion : P_n est vraie au rang 0, elle est héréditaire, on a démontré par récurrence que **pour tout entier n** $0 < U_n < 4$

Bonus : Montrer que la suite $U_n = \frac{7n+9}{2n+3}$ est minorée par 3 .

Pour tout n de N

$U_n - 3 = \frac{7n+9}{2n+3} - 3 = \frac{7n+9-3(2n+3)}{2n+3} = \frac{7n+9-6n-9}{2n+3} = \frac{n}{2n+3} \geq 0$