CONTROLE DU 13/11/18 CORRIGE

EXERCICE 1

Partie 1

1. **Limites en l'infini**

En +∞

On a une forme indéterminée en + ∞.

$$\lim_{x\to+\infty} g\,(\,x\,) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1-\frac{12}{x^2}+\frac{17}{x^3}\right)$$

Or $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3} = 0$ soit par somme $\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{12}{x^2}+\frac{17}{x^3} = 1$

$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

Soit finalement par produit de limites

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g\,(\,x\,) = +\infty}$$

En -∞

On a aussi une indéterminée en -∞ donc en procédant de la même manière qu'en +∞ on montre que

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} g\,(\,x\,) = -\infty}$$

2.g est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur ℝ.

$g'(\,x\,) = 3x^2 - 12 = 3\,(\,x^2 - 4) = 3\,(\,x - 2\,)(\,x + 2)$. D'après la règle sur le signe du trinôme du second degré on en déduit le signe de g'(x) et le tableau de variation de g sur ℝ :

x	-∞		-2		2		+∞
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(\,x\,)$	-∞	↗	33	↘	1	↗	+ ∞

3. La fonction g est continue et strictement croissante de l'intervalle] -∞ ;-2 [à valeurs dans l'intervalle]−∞ ; 33 [qui contient 0, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires relatif aux fonctions strictement monotones l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α dans] -∞ ;-2 [.

De plus, d'après le tableau de variation obtenu au 2°), on a $g > 0$ sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$ puisque le minimum de g sur cet intervalle est 1 atteint en 2 .

On en déduit donc finalement que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans R.

4. Comme $g(-4{,}02) \approx -0.$ et que $g(-4{,}03) = 0.$ donc $g(-4{,}02) \times g(-4{,}03)$ on en déduit que $-4{,}03 < \alpha < -4{,}02$.

5. On en déduit le signe de g sur R

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

Partie B

1. a) **Limites en l'infini**

En +∞

On a une forme indéterminée en + ∞.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(2-\frac{17}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-\frac{17}{x^3}\right)}{1-\frac{4}{x^2}}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{17}{x^3} = 0$ soit par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{17}{x^3} = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

Donc par produit de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{4}{x^3}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ soit encore $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{4}{x^2} = 1$

Soit finalement par quotient de limites

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

En -∞

On a aussi une indéterminée en -∞ donc en procédant de la même manière qu'en +∞ on montre que

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$

b) **En 2**

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} 2x^3 - 17 = -1$

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} x^2 - 4 = 0^+$

Donc par quotient des limites

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) = -\infty}$$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} 2x^3 - 17 = -1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} x^2 - 4 = 0^-$

Donc par quotient des limites

$$\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x) = +\infty}$$

En -2

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} 2x^3 - 1 = -17$

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} x^2 - 4 = 0^-$

Donc par quotient des limites

$$\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} f(x) = +\infty}$$

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} 2x^3 - 1 = -17$

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} x^2 - 4 = 0^+$

Donc par quotient des limites

$$\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} f(x) = -\infty}$$

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x) = -\infty$ alors la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à C . De même la droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à C

2.La fonction f qui est une fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition

$$f'(x) = \frac{6x^2(x^2-4)-(2x^3-1).2x}{(x^2-4)^2} = \frac{6x^4-24x^2-4x^4+2x}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^4-24x^2+2x}{(x^2-4)^2} = \frac{2x(x^3-12x+1)}{(x^2-4)^2} = \frac{2xg(x)}{(x^2-4)^2}$$

3. $f(\alpha) = \frac{2\alpha^3-17}{\alpha^2-4}$ Or $g(\alpha) = 0$ soit $\alpha^3 = 12\alpha - 17$ et $\alpha^2 - 4 = \frac{8\alpha-17}{\alpha}$ donc

$f(\alpha) = \alpha\frac{24\alpha-51}{8\alpha-17} = 3\alpha$.

4.D'après 2. $f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2-4)^2}$ or $(x^2-4)^2 > 0$ pour tout x de R\{-2 ;2} on en déduit que

$f'(x)$ est du signe de $xg(x)$ sur R\{-2 ;2}. On étudie le signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$		α		-2		0		2		$+\infty$
x		-		-	‖	-	0	+	‖	+	
$g(x)$		-	0	+	‖	+		+	‖	+	
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	‖	+	

On a donc le tableau de variation de f

x	$-\infty$		α		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	α	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{17}{4}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

5. Les abscisses des points de C où la tangente est parallèle à la droite d'équation y = 2x vérifient l'équation $f'(x) = 2$ où x dans R\{-2 ; 2} c'est-à-dire l'équation:

$\frac{2x^4-24x^2+34x}{(x^2-4)^2} = 2$ soit encore $2x^4 - 24x^2 + 34x = 2x^4 - 16x^2 + 32$

$$-8x^2 + 34x - 32 = 0$$

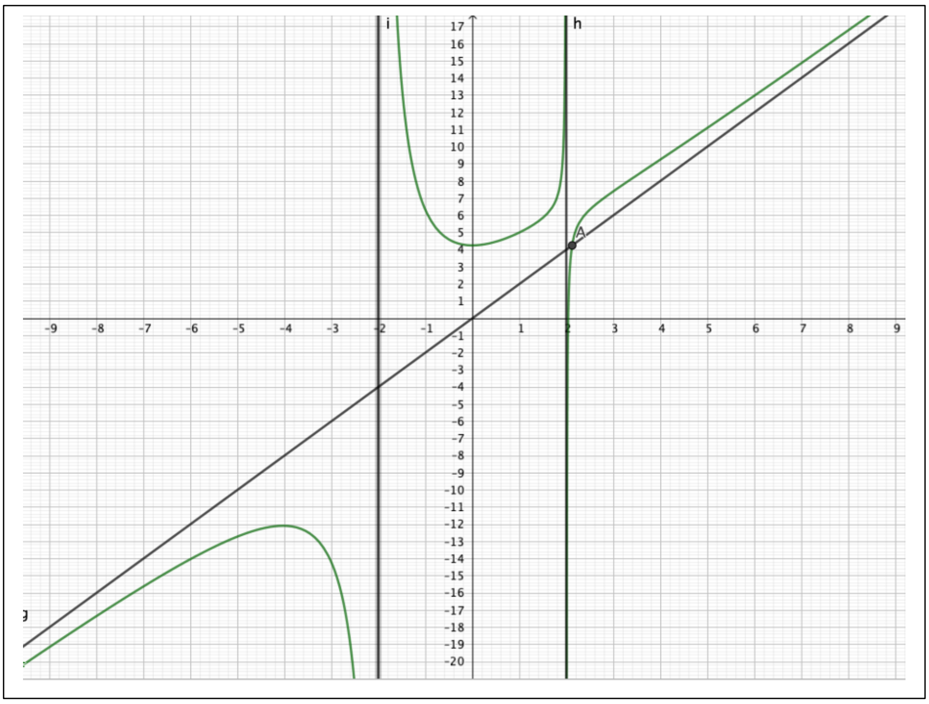
Qui équivaut finalement à $4x^2 - 17x + 16 = 0$

$\Delta = 33^2$ $\quad x = \frac{17+\sqrt{33}}{8}$ ou $x = \frac{17-\sqrt{33}}{8}$

Les coordonnées des points cherchés sont donc $\left(\frac{17-\sqrt{33}}{8} ; \frac{51-\sqrt{33}}{8}\right)$ et $\left(\frac{17+\sqrt{33}}{8} ; \frac{51+\sqrt{33}}{8}\right)$

Partie C

1.2. Il semble que la courbe C est au-dessus de D sur] -2 ;2[U [2,1; +∞ [et que C est en-dessous de D sur] -∞ ;-2[U] 2 ; 2,1].



3. Pour étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et T il faut et il suffit d'étudier le signe de $h(x) = f(x) - 2x$

h(x)= $\frac{8x-17}{x^2-4}$

x	$-\infty$	-2	2	$\frac{17}{8}$	$+\infty$
x	-	-	-	0	+
$g(x)$	+	-	+		+
$f'(x)$	-	+	-	0	+

on en déduit donc que C au- dessus de D sur] -2 ;2[U [$\frac{17}{8}$; $+\infty$ [et en – dessous de D sur] $-\infty$;-2[U] 2 ; $\frac{17}{8}$]

Exercice 2 (corrigé non détaillé)

1°) On montre d'abord que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x+3}{5x^2+x+2}$ = 0 puis on utilise la composée des limites
Pour prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2°) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ = -3 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ = 0 $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ = -3

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\x>3}} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 3} h(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\x<3}} f(x) = +\infty$

3°) On montre que, **comme (attention !) x + 4 < 0** si x tend vers $-\infty$

$$\frac{3x^2}{x+4} \leq \frac{-3\cos x + 3x^2 - 3}{x+4} \leq \frac{3x^2 - 6}{x+4}$$

Puis que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\mathbf{3x^2 - 6}}{\mathbf{x+4}} = -\infty$ donc en utilisant le théorème de comparaison des limites et par majoration on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

EXERCICE 3

1. **a.** À l'aide d'une calculatrice, on obtient les valeurs suivantes :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3,4	2,18	1,19	0,61	0,31	0,16	0,08	0,04

b. Au vu du tableau précédent, on peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

2. **a.** Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété : « $u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$ ». Montrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.

- **Initialisation.** On a $u_1 = 3{,}4$ et $\frac{15}{4} \times 0{,}5 = 1{,}875$, donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

- **Hérédité.** Soit n entier naturel non nul, et $\mathscr{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire que :

(HR) $$u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^k$$

on doit alors démontrer que la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^{n+1}$.
D'après (HR) :

$$\begin{aligned}
u_n &\geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^n && \text{donc, en multipliant par } \frac{1}{5} : \\
\frac{1}{5}u_n &\geqslant \frac{3}{4} \times 0{,}5^n && \text{puis, en ajoutant membre à membre } 3 \times 0{,}5^n : \\
\frac{1}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n &\geqslant \frac{3}{4} \times 0{,}5^n + 3 \times 0{,}5^n && \text{c'est-à-dire :} \\
u_{n+1} &\geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^n
\end{aligned}$$

Or, pour tout entier naturel n, $0{,}5^n \geqslant 0{,}5^{n+1}$, on en déduit donc que :

$$u_{n+1} \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^{n+1}$$

et la propriété $\mathscr{P}(n)$ est donc héréditaire.
La propriété est vraie 1 et si elle est vraie à un rang non nul, n elle est vraie au range suivant $n+1$.
On a donc démontré par le principe de récurrence que pour tout naturel non nul $u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$.

- **Conclusion.** La propriété $\mathscr{P}(n)$ est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel n non nul.

b. Pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n - u_n \\
&= 3 \times 0{,}5^n - \frac{4}{5}u_n \\
&= \frac{4}{5}\left(\frac{15}{4} \times 0{,}5^n - u_n\right)
\end{aligned}$$

D'après la question 1a, cela entraîne que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

c. D'après la question précédente la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang. D'après 2a, pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^n > 0$, la suite est donc minorée. On en déduit, d'après le théorème de convergence des suites monotones, que la suite (u_n) est convergente.

3. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 10 \times 0{,}5^{n+1}\\
&= \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n - 10 \times 0{,}5 \times 0{,}5^n\\
&= \frac{1}{5}u_n - 2 \times 0{,}5^n\\
&= \frac{1}{5}\left(u_n - 10 \times 0{,}5^n\right)\\
&= \frac{1}{5}v_n.
\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{5}$.
Son premier terme vaut $v_0 = u_0 - 10 \times 0{,}5^0 = 2 - 10 = -8$.

b. La suite (v_n) étant géométrique, on a, pour tout entier naturel n : $v_n = -8\left(\frac{1}{5}\right)^n$.
On en déduit que $-8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = u_n - 10 \times 0{,}5^n$ et donc que : $u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0{,}5^n$.

c. $-1 < \frac{1}{5} < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^n = 0$, de même : $-1 < 0{,}5 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$.
On en déduit par opérations sur les limites que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

4. L'algorithme complet est :

```
n et u sont des nombres
n prend la valeur 0
u prend la valeur 2
Tant que u > 0,01
    n prend la valeur n + 1
    u prend la valeur (1/5)u + 3 × 0,5^(n−1)
Fin Tant que
Afficher n
```