CONTROLE DU 14/12/21 terminale spé CORRIGE

EXERCICE 1

Partie 1

1. **Limites en l'infini**

En $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -10x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -6x^2 = -\infty$

Donc par sommes de limites $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty}$

2.g est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

$g'(x) = -30x^2 - 12x = -6x(5x+2)$. Comme a = -30 D'après la règle du signe du trinôme du second degré on en déduit le signe de g'(x), et le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}^+$:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	
$g(x)$	15 ↘	$-\infty$

3. La fonction g est continue et strictement croissante de l'intervalle, $[0;+\infty[$ à valeurs dans l'intervalle $]-\infty\,;15\,]$ qui contient 0, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires relatif aux fonctions strictement monotones l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α dans $[0;+\infty[$.

4. Comme d'après la calculatrice g (0,97) ≈ 0,23 et que g (0,98) = -0,17 alors

g (0,97)x g (0,98) <0 , on en déduit que 0,97 < α < 0,98

5. On en déduit le signe de g sur $[0;+\infty[$

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

Partie B

1. **Limites en l'infini**

En +∞

On a une forme indéterminée en + ∞ du type ∞/∞ donc on transforme l'écriture de f(x) et on a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(5+\frac{2}{x})}{x^3(1+\frac{3}{x^3})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5+\frac{2}{x}}{x^2(1+\frac{3}{x^3})}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ soit par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} 5+\frac{2}{x} = 5$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x^3} = 0$ soit par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{3}{x^3} = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

Donc par produit de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(1+\frac{3}{x^3}) = +\infty$

Soit finalement par quotient de limites

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ alors l'axe des abscisses d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à C au voisinage de + ∞ .

3.La fonction f qui est une fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition

$$f'(x) = \frac{5(x^3+3)-(5x+2)3x^2}{(x^3+3)^2} = \frac{5x^3+15-15x^3-6x^2}{(x^3+3)^2} = \frac{-10x^3-6x^2+15}{(x^3+3)^2} = \frac{g(x)}{(x^3+3)^2}$$

4.D'après le 3. $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^3+3)^2}$ or $(x^3+3)^2 > 0$ pour tout x de R^+ on en déduit que

$f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur R+. On a donc le tableau de variation de f

x	0		α		+∞
f '(x)		+	0	-	
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	↗	f(α)	↘	0

Exercice 2

1°) f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur I.

$f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$. Comme a = -3 D'après la règle du signe du trinôme du second degré on en déduit le signe de f '(x), et le tableau de variation de f sur I :

x	$-\infty$		0		2		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	-17

<u>Limite en - ∞</u>

$$\lim_{x\to+\infty} -x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty$$

Puis par somme

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

2°) Equation de la tangente en $x = 1$.

y = f '(1)(x – 1) + f(1)

y= 3 x - 2

3°) a) $f''(x) = -6x + 6$

on en déduit le signe de f ''(x) sur I :

x	$-\infty$		1		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

b) Comme $f''(x) \geq 0$ sur $]-\infty; 1]$ alors f est convexe sur $]-\infty; 1]$

Comme $f''(x) \leq 0$ sur $[1; 4]$ alors f est concave sur $[1; 4]$

On en déduit que la courbe de f admet un point d'inflexion sur I qui est le point A(1 ; 1)

Exercice 3

1°) a) f est une fonction polynôme sur I donc elle est continue sur I .

b) f(x) = x avec x dans I équivaut à $0,6x(1-x) + 0.35 = x$ soit à

$-0,6\,x^2 - 0,4\,x + 0,35 = 0$

$\Delta = 1$. On a deux racines distinctes qui sont ½ et -7/6 . Donc dans I on a la seule racine acceptable est ½ . S = $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

c) f '(x) = - 1,2 x + 0,6 on en déduit le tableau de variation de f sur I :

x	0	½
f '(x)	+	0
$f(x)$	0,35 ↗	½

d) D'après le tableau de variation , si x dans I alors

$0,35 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ comme 0,35 >0

Donc on a bien si x dans I alors $f(x)$ dans I

2°) On considère la propriété Pn : $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 0.5$

Initialisation : pour n=0 on a $U_0 = 0$, $U_1 = 0,35$ donc $0 \leq U_0 \leq U_1 \leq 0.5$ et P_0 est vraie

Hérédité : On suppose la propriété vraie **pour un entier naturel n** c'est- à- dire $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 0.5$

Notre objectif est de démontrer que Pn+1 est vraie à savoir $0 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 0.5$

Par hypothèse de récurrence on a donc $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 0.5$

Alors d'après le 1)c), comme f est croissante $f(0) \leq f(U_n) \leq f(U_{n+1}) \leq f(0.5)$

et On a finalement D'après le 1)d) $0 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 0.5$

La propriété est donc vraie au rang n+1.

Conclusion : P_n est vraie au rang 0, elle est héréditaire, on a ainsi démontré par récurrence que **pour tout entier naturel n** $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 0.5$.

b) D'après précédemment on sait que (U_n) est croissante puisque **pour tout entier naturel n** $U_n \leq U_{n+1}$ et qu'elle est aussi majorée par 0.5 car **pour tout entier naturel n** $U_n \leq 0,5$.

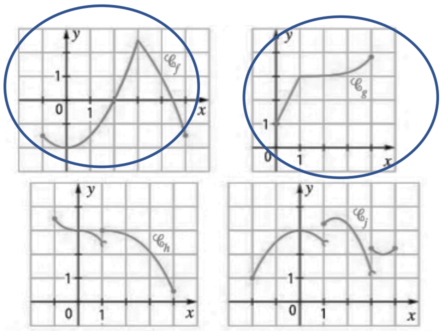
D'après le théorème de convergence monotone (Un) est donc convergente.

c) (Un) est donc convergente de limite a et est une suite définie par récurrence par

$U_{n+1} = f(U_n)$ avec f qui est une fonction continue. Donc d'après le th du point fixe a est une solution de l'équation a=f(a) avec a $\geq Uo$. D'après le 1b) on a donc a = 0.5 donc $\lim\limits_{n \to +\infty} Un = 0.5$.

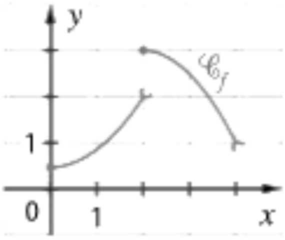
<u>Exercice 4 (4 points)</u>

1) Entourer la(les) courbes de la (des) fonction(s) continue(s) sur leur ensemble de définition :



2)Entourer la réponse juste

____ f une fonction définie sur l'intervalle [0 ; 4] et dont on donne la représentation graphique dans un repère.



1. La fonction f est-elle continue en 3 ? Oui non

2. La fonction f est-elle continue en 2 ? Oui non

3)

Choisir la ou les bonnes réponses.

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur [−7 ; 10]. On donne ci-dessous le tableau de signes de sa fonction dérivée seconde.

x	−7		−1		2		10
$f''(x)$		−	0	+	0	+	

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

a. f est convexe sur [−1 ; 2].

b. f est concave sur [−5 ; 0].

c. Le point A d'abscisse −1 de $\mathscr{C}_f$ est un point d'inflexion de cette courbe.

d. Le point B d'abscisse 2 de $\mathscr{C}_f$ est un point d'inflexion de cette courbe.

Choisir la ou les bonnes réponses.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. On sait que, pour tout réel x, $x+1 \leqslant f(x)$.

On peut déterminer :

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ b. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ c. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. On sait que, pour tout réel x, $f(x) \leqslant x+2$.

On peut déterminer :

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ b. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ c. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.