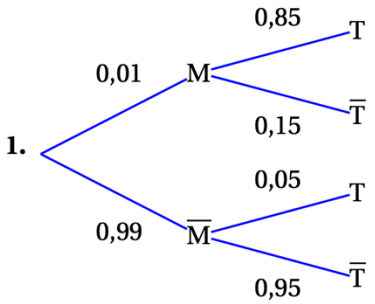
CONTROLE DE SPECIALITE MATHS TERMINALE. Corrige

EX 1

1.



2. **a.** On suit la première branche : la probabilité est égale à
$p(\mathrm{M}) \times p_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) = 0,01 \times 0,85 = 0,0085$.

b. La probabilité qu'il soit non porteur de la maladie et que son test soit positif (troisième branche) est égale à $0,99 \times 0,05 = 0,0495$.

On a donc $p(\mathrm{T}) = p(\mathrm{M}) \times p_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) + p\left(\overline{\mathrm{M}}\right) \times p_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) = 0,0085 + 0,0495 = 0,058$.

3. Il faut calculer $p_{\mathrm{T}}(\mathrm{M}) = \dfrac{p(\mathrm{M} \cap \mathrm{T})}{p(\mathrm{T})} = \dfrac{0,0085}{0,058} \approx 0,1466$.

4. **a.** On a ici une épreuve de Bernoulli de paramètres $n = 5$ et $p = 0,0085$.
La probabilité que k animaux soient malades est égale à :

$$\binom{5}{k} \times 0,0085^k \times (1 - 0,0085)^{5-k}.$$

On obtient le tableau de la loi de probabilité de X suivant :

$\mathrm{X} = x_i$	0	1	2	3	4	5
$p(\mathrm{X} = x_i)$	0,7417	0,2284	0,0281	0,0017	0,0001	0

b. L'évènement contraire est : tous les animaux ont un test négatif qui d'après le tableau précédent a une probabilité d'environ 0,7417.
La probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif est donc : $1 - 0,7417 = 0,2583$.

Ex 2

Partie A

1. En utilisant la première courbe et dans la limite de précision du graphique, la fonction f atteint son maximum pour une valeur $x_0 \in]1\,;\,2[$.

   a. En utilisant la troisième et dans la limite de précision du graphique, la fonction f semble être convexe sur l'intervalle $[3\,;\,5]$.
   En effet, sur cet intervalle on peut voir que $f''(x) \geqslant 0$. En utilisant là-encore le troisième graphique, la dérivée seconde de la fonction f s'annule et change de signe sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.
   La courbe représentative de la fonction$f$ admettra donc un point d'inflexion dont l'abscisse appartient à l'intervalle $]2\,;\,3[$

2. L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 est : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.
   D'après le premier graphique, $f(0) = 0$; et d'après le second, $f'(0) = 2$.
   Donc l'équation réduite de la tangente est $y = 2x$.

Partie B

Courbe 3

En comparant le sens de variation de f et le signe des fonctions proposées comme dérivées, on peut éliminer les courbes 1 et 4. La tangente à $\mathscr{C}$ passant par A a pour coefficient directeur 1 *ce qui permet d'éliminer la courbe 2.*

Ex 3

PROPOSITION A

1. **a.** Sens de variation de la fonction f :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} > 0 \text{ sur }]-1\,;\,+\infty[$$

   La fonction f est donc croissante sur $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

   b. Limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition :

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty \text{ car } \lim_{x\to -1^+} 1+x = 0^+ \text{ et } \lim_{x\to -1^+} \ln(1+x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x\to +\infty} 1+x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to +\infty} \ln(1+x) = +\infty$$

   Tableau de variations de f :

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

c. Sens de variation de la fonction g

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \text{ du signe de } -x \text{ sur }]-1\,;\,+\infty[$$

La fonction g est donc strictement croissante sur $]-1;0[$ et strictement décroissante sur $]0;\ +\infty[$.
Elle possède une tange,nte horizonate au point d'abscisse 0.
Tableau de variations de la fonction g :

x	-1		α		0		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$			0			$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

d. Sur l'intervalle $]-1\,;\,0[$, la fonction g est continue, comme somme et composée de fonctions continues, et strictement croissante. Elle réalise donc une bijection de $]-1\,;\,0[$ sur $]-\infty\,;\,1[$. Or 0 appartient à l'ensemble d'arrivée $]-\infty\,;\,1[$. Donc, 0 possède un unique antécédent, noté α dans $]-1\,;\,0[$.

Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la fonction g est continue, comme somme et composée de fonctions continues, et strictement décroissante. Elle réalise donc une bijection de $]0\,;\,+\infty[$ sur $]-\infty\,;\,1[$. Or 0 appartient à l'ensemble d'arrivée $]-\infty\,;\,1[$. Donc, 0 possède un unique antécédent, noté β dans $]0\,;\,+\infty[$.

De plus :

$$\begin{cases} g(2) \simeq 0{,}0986 > 0 \\ g(3) \simeq -0{,}614 < 0 \end{cases} \Longrightarrow 2 \leqslant \beta \leqslant 3$$

e. Signe de $g(x)$:

— $-1 < x \leqslant \alpha \Longrightarrow g(x) \leqslant g(\alpha) = 0$. (La fonction g est croissante sur $[-1;\alpha[$).
— $\alpha \leqslant x \leqslant 0 \Longrightarrow g(\alpha) = 0 \leqslant g(x)$. (La fonction g est croissante sur $[\alpha;0]$).
— $0 \leqslant x \leqslant \beta \Longrightarrow g(x) \geqslant 0 = g(\beta)$. (La fonction g est décroissante sur $[0;\beta[$).
— $x \geqslant \beta \Longrightarrow g(x) \leqslant 0 = g(\beta)$. (La fonction g est décroissante sur $[\beta;+\infty[$).

x	-1		α		β		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Position relative de $\mathscr{C}_f$ et de D		$\mathscr{C}_f \prec (D)$	A	$\mathscr{C}_f \succ (D)$	B	$\mathscr{C}_f \prec (D)$	

Position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite D :
— $\mathscr{C}_f$ est située au dessus de la droite D pour $x \in]\alpha\,;\,\beta[$.
— $\mathscr{C}_f$ est située en dessous de la droite D pour $x \in]-1\,;\,\alpha[\cup]\beta\,;\,+\infty[$.

PROPOSITION B

1) a) $\varphi(1) = 1^2 - 1 + 3\ln(1) = 0$. Ensuite, $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-1\right) = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0} 3\ln(x) = -\infty$. En additionnant, on obtient $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = -\infty$.

b) La fonction φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x>0$,

$$\varphi'(x) = 2x + \frac{3}{x}.$$

La fonction φ' est strictement positive sur $]0,+\infty[$ et donc la fonction φ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
Par suite, pour $0<x<1$, on a $\varphi(x)<\varphi(1)$ ou encore $\varphi(x)<0$ et pour $x>1$, on a $\varphi(x)>\varphi(1)$ ou encore $\varphi(x)>0$.
La fonction φ est strictement négative sur $]0,1[$, strictement positive sur $]1,+\infty[$ et s'annule en 1.

2) a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-2x-2\right) = -2$ et $\lim\limits_{x\to 0} -3\ln(x) = +\infty$. En additionnant, on obtient $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-2x-2-3\ln x\right) = +\infty$.
D'autre part, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x} = +\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-2x-2-3\ln x\right)\times\dfrac{1}{x} = +\infty$.

Pour tout réel strictement positif x, $f(x) = x-2-\dfrac{2}{x}-3\dfrac{\ln x}{x}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -3\dfrac{\ln x}{x} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. En additionnant, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

b) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$ et pour $x>0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(2x-2-\dfrac{3}{x}\right)x - \left(x^2-2x-2-3\ln x\right)\times 1}{x^2} = \frac{2x^2-2x-3-x^2+2x+2+3\ln x}{x^2} \\ &= \frac{x^2-1+3\ln x}{x^2} = \frac{\varphi(x)}{x^2}. \end{aligned}$$

Pour tout $x>0$, $x^2>0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $\varphi(x)$. Avec le résultat de la question 1)b), on peut dresser le tableau de variation de la fonction f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	-3	↗	$+\infty$

c) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]0,1]$. On sait alors que pour tout réel k de $\left[f(1), \lim\limits_{x\to 0} f(x)\right[= [-3,+\infty[$, l'équation $f(x)=k$ admet une solution et une seule dans $]0,1]$. En particulier, puisque $0\in[-3,+\infty[$, l'équation $f(x)=0$ admet une solution et une seule dans $]0,1]$, solution notée α.

La calculatrice fournit $f(0,41) = 0,05\ldots > 0$ $f(0,42) = -0,14\ldots < 0$. Donc, $f(0,41) > f(\alpha) > f(0,42)$. Puisque f est strictement décroissante sur $]0,1]$, on en déduit que $0,41<\alpha<0,42$. Une valeur approchée de α à 10^{-2} près est $0,41$.