CONTROLE DE MATHEMATIQUES TERMINALE SPECIALITE DUREE : 2 H

EXERCICE 1 (7 points)

Une grande enseigne décide d'organiser dans ses magasins un jeu permettant de gagner un bon d'achat. Le jeu se déroule en deux étapes.

• Étape 1

Chaque client tire au hasard une carte sur laquelle figure un nombre de 1 à 50, chaque numéro ayant la même probabilité d'être découvert.

• Étape 2

– Si le client découvre un numéro compris entre 1 et 15, il fait tourner une roue divisée en 10 secteurs de même taille dont 8 secteurs contiennent une étoile.

– Sinon, il fait tourner une autre roue divisée elle aussi en 10 secteurs de même taille dont un seul secteur contient une étoile.

Un bon d'achat est gagné par le client si la roue qu'il a fait tourner s'arrête sur une étoile.

Partie A : vérifier un budget

Dans un premier temps, on peut gagner des bons d'achats de 10 €.

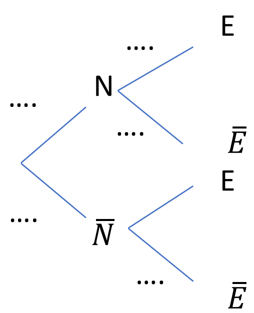
Pour ce jeu, le directeur de l'hypermarché a prévu un budget de 250 € par tranche de 100 clients y participant.

Pour vérifier que son budget est suffisant, il simule 100 répétitions indépendantes du jeu.

On appelle X la variable aléatoire qui, à 100 jeux simulés, associe le nombre de bons d'achat gagnés.

On admet que X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

1. a) Donner la valeur de n.
   b) Compléter l'arbre ci-dessous.
   N désigne l'événement qui correspond au « numéro tiré est entre 1 et 15 »
   et E celui qui correspond au « résultat de la roue est une étoile »



c) Montrer que la probabilité p, deuxième paramètre de X, est égale à 0.31 .

2. Calculer la probabilité pour qu'il y ait exactement 30 bons d'achat gagnés.
3. Calculer la probabilité que 20 bons d'achats soient gagnés ou moins.
4. Calculer la probabilité qu'au moins la moitié des jeux fassent gagner un bon d'achat.
5. Quel est le montant moyen de la somme totale offerte en bons d'achat ? Le budget prévisionnel est-il suffisant ?

Partie B : calculer l'espérance et la variance du gain

Lors de la dernière semaine de l'action, les règles du jeu changent : on tire toujours une carte et on gagne un bon d'achat d'un montant égal à la moitié du montant indiqué.
Puis, on tourne systématiquement la roue qui n'affiche qu'une seule étoile et on gagne un bon d'achat supplémentaire d'un montant de 50 € si la roue s'arrête sur l'étoile.
X et Y sont les variables aléatoires qui donnent les montants des bons d'achat gagnés respectivement pendant la première et la deuxième étape, avec ces nouvelles règles.
1. Établir les lois de probabilités de X, puis de Y.
2. Calculer l'espérance et la variance de X et de Y. *Arrondir au centième.*
3. Calculer l'espérance et la variance de la somme des montants des bons d'achat obtenus.

Exercice 2 (6 points)

Un laboratoire pharmaceutique mène des études sur la vaccination contre la grippe dans une ville.
Après la période hivernale, on interroge au hasard 40 habitants de la ville, on admet que ce choix se ramène à n tirages successifs avec remise.
On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes vaccinées parmi les 40 interrogées.
1. a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?
b) Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée. *Arrondir au centième.*
c) Calculer l'espérance et l'écart-type du nombre de personnes vaccinées parmi les 40 personnes interrogées. *Arrondir au centième si besoin.*
2. Le laboratoire effectue n fois cette étude, sans enregistrer les noms des habitants interrogés.
M_n est la moyenne du nombre de personnes vaccinées sur ces n sondages.
a) Préciser l'espérance de M_n, puis exprimer l'écart-type de M_n en fonction de n.
b) Quelle est la valeur minimum de n telle que l'écart-type de M_n soit inférieur à 0,5 ?

EXERCICE 3 (7 points)

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = (1-x)\,e^x + 1$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g.
3. Donner le tableau de variations de g.
4. **a.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\,;\,+\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.

   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

   c. Démontrer que $e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{e^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0\,;\,+\infty[$.

Partie 3

On considère la $h(x) = e^{2x} - xe^x - 4$. On admet que $h \leq g$ sur l'intervalle $[0; 1]$.

On a représenté les courbes Cg et Ch en annexe.

1°) Hachurer le domaine E du plan compris entre l'axe des ordonnées la droite d'équation x=1 et les courbes Cg et Ch.

2°) a) On pose $J(x) = g(x) - h(x)$. Donner l'expression la plus simple possible de $J(x)$.

b) Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine E en u.a .

ANNEXE