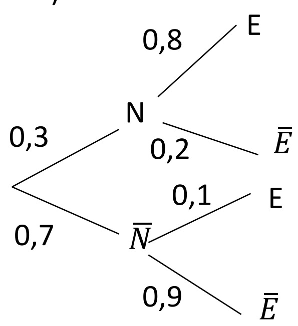
Contrôle terminale spécialité 230321 corrigé

EX 1

1. a) n =100

b)



c)

La probabilité de gagner un bon d'achat de 10 € est $0{,}3 \times 0{,}8 + 0{,}7 \times 0{,}1 = 0{,}31$.

Les paramètres de la loi de X sont donc $n = 100$ et $p = 0{,}31$.

2. $P(X = 30) \approx 0{,}084767$

3. $P(X \leqslant 20) \approx 0{,}009658$

4. $P(X \geqslant 50) \approx 0{,}000057$

5. Le nombre moyen de clients recevant un bon d'achat sur 100 clients est l'espérance de X, $E(X) = 100 \times 0{,}31 = 31$. Le montant moyen de la somme totale distribuée est donc 310 €.

Ainsi, le budget prévu n'est pas suffisant.

Partie B

1. Loi de probabilité de X :

xi	3	6	9	12	15	18	21	24
P(X=xi)	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125

Loi de probabilité deY :

yi	0	50
P(Y=yi)	0.9	0.1

2. E(X) = 13,5 E(Y) = 5 V(X) = 47,25 V(Y) = 225

3. E(X +Y) = E(X) + E(Y) = 18,5

X et Y sont indépendantes ce qui donne V(X+Y)= V(X) + V(Y) = 272,25

EX 2

1. a) X suit la loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0{,}4$.

b) $P(X \geqslant 20) \approx 0{,}13$

c) $E(X) = 16$ et $\sigma(X) \approx 3{,}1$.

2. a) $E(M_n) = E(X) = 16$ et $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}} = \dfrac{3{,}1}{\sqrt{n}}$.

b) Le nombre n doit vérifier :

$$\frac{3{,}1}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}5$$
$$\sqrt{n} \geqslant \frac{3{,}1}{0{,}5}$$
$$\sqrt{n} \geqslant 6{,}2$$
$$n \geqslant 38{,}44$$

La valeur minimale de n est donc 39.

EX3

Partie 1

1. On a $g(x) = e^x(1-x)+1$.
   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x) = -\infty$, donc par produit des limites :
   $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
2. La fonction g somme de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ est dérivable et sur $[0\,;\,+\infty[$:
   $g'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$.
   Comme $e^x > 0$ et $x > 0$, on a $g'(x) < 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
   g est donc décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$ de $g(0) = 2$ à $-\infty$.
3. Donner le tableau de variations de g.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	2	$-\infty$

4. **a.** Sur $[0\,;\,+\infty[$, g dérivable est donc continue et décroissante, $g(0) > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
   Il existe donc un réel unique $\alpha \in [0\,;\,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

   b. La calculatrice donne :
   - $g(1) = 1$ et $g(2) \approx -6{,}4$, donc $1 < \alpha < 2$;
   - $g(1{,}2) \approx 0{,}3$ et $g(1{,}3) \approx -0{,}1$, donc $1{,}2 < \alpha < 1{,}3$;
   - $g(1{,}27) \approx 0{,}04$ et $g(1{,}28) \approx -0{,}007$, donc $1{,}27 < \alpha < 1{,}28$.

   c. On a $g(\alpha) = 0 \iff e^\alpha - \alpha e^\alpha + 1 = 0 \iff e^\alpha(1-\alpha) = -1 \iff e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
5. On a donc $g(x) > 0$ sur $[0\,;\,\alpha[$;
   $g(\alpha) = 0$;
   $g(x) < 0$ sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.

Partie 2

1. La fonction A quotient de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ (le dénominateur ne s'annulant pas) est dérivable et sur cet intervalle :
   $A'(x) = \dfrac{4\left(e^x+1\right) - 4x \times e^x}{\left(e^x+1\right)^2} = \dfrac{4\left(e^x - xe^x + 1\right)}{\left(e^x+1\right)^2} = \dfrac{4g(x)}{\left(e^x+1\right)^2}$.
   Comme $\left(e^x+1\right)^2 > 0$ quel que soit x, le signe de $A'(x)$ est celui de $g(x)$.
   D'après la précédente question on a donc :
   $A'(x) > 0$ sur $[0\,;\,\alpha[$;
   $A'(\alpha) = 0$;
   $A' < 0$ sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.
2. On a donc :
   $A(x)$ est croissante sur $[0\,;\,\alpha[$ et décroissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$, $A(\alpha)$ étant le maximum de la fonction.

Partie 3

J(x) =$e^x - e^{2x} + 5$

A = $\int_0^1 e^x - e^{2x} + 5\,dx$ = $[e^x - 0.5e^{2x} + 5x]_0^1$ = e – 0.5e^2 + 5 – 0.5 = e-0.5e^2 + 4.5 U.a