CONTROLE DE MATHEMATIQUES. TERMINALE SPECIALITE DUREE 2 H

EXERCICE 1 (7 points)

1) Si $t = 0$, on obtient $x = 2 = x_A$, $y = 3 = y_A$ et $z = 0 = z_A$ dans la représentation paramétrique de d_1. Donc, le point A appartient à la droite d_1.

2) Un vecteur directeur de d_1 est $\overrightarrow{u_1}(1, -1, 1)$ et un vecteur directeur de d_2 est $\overrightarrow{u_2}(2, 1, 0)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

3)

$$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u_1} = 1 \times 1 + (-2) \times (-1) + (-3) \times 1 = 1 + 2 - 3 = 0$$

et

$$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u_2} = 1 \times 2 + (-2) \times 1 + (-3) \times 0 = 2 - 2 = 0.$$

Donc, le vecteur $\overrightarrow{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

4) a) Soit P' le plan d'équation $5x + 4y - z - 22 = 0$. $5x_A + 4y_A - z_A - 22 = 5 \times 2 + 4 \times 3 - 0 - 22 = 0$ et donc le point A appartient au plan P'.

Un vecteur normal au plan P' est le vecteur $\overrightarrow{n}(5, 4, -1)$.

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u_1} = 5 \times 1 + 4 \times (-1) + (-1) \times 1 = 5 - 4 - 1 = 0$$

et

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{v} = 5 \times 1 + 4 \times (-2) + (-1) \times (-3) = 5 - 8 + 3 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v}$. En résumé, le plan P' est le plan passant par A et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v}$ ou encore $P' = P$. Ainsi, P est le plan d'équation $5x + 4y - z - 22 = 0$.

5) a) Δ est la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 3 + u \\ y = 3 - 2u \\ z = 5 - 3u \end{array}\right.$, $u \in \mathbb{R}$.

b) Soient $M(2 + t, 3 - t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de d_1 et $N(3 + u, 3 - 2u, 5 - 3u)$, $u \in \mathbb{R}$, un point de Δ.

$$M = N \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2 + t = 3 + u \\ 3 - t = 3 - 2u \\ t = 5 - 3u \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = u + 1 \\ 3 - (u + 1) = 3 - 2u \\ u + 1 = 5 - 3u \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = u + 1 \\ u = 1 \\ u = 1 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 2 \\ u = 1 \end{array}\right.$$

Les droites d_1 et Δ sont donc sécantes en le point de coordonnées $(4, 1, 2)$.

EXERCICE 2 (7 points)

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs.
On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique.
On note :

- S l'évènement « le voyageur fait sonner le portique » ;
- M l'évènement « le voyageur porte un objet métallique ».

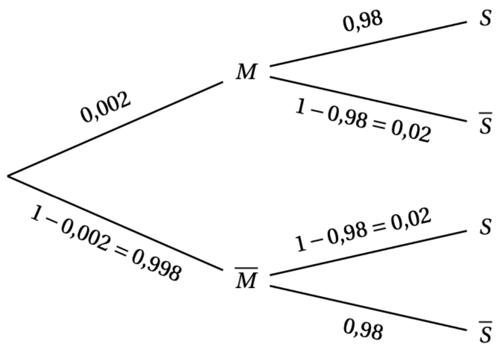
On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.

1. On admet que :

- Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,98 ;
- Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à 0,98.

a. D'après l'énoncé, $P(M) = \dfrac{1}{500} = 0{,}002$, $P_M(S) = 0{,}98$ et $P_{\overline{M}}\left(\overline{S}\right) = 0{,}98$.

b. L'arbre pondéré ci-dessous illustre cette situation :



c. D'après la formule des probabilités totales :
$P(S) = P(S \cap M) + P\left(S \cap \overline{M}\right) = P_M(S) \times P(M) + P_{\overline{M}}(S) \times P\left(\overline{M}\right) = 0{,}002 \times 0{,}98 + 0{,}998 \times 0{,}02 = 0{,}021\,92$.

d. Par définition : $P_S(M) = \dfrac{P(M \cap S)}{P(S)} = \dfrac{P_M(S) \times P(M)}{P(S)} = \dfrac{0{,}002 \times 0{,}98}{0{,}02192} \approx 0{,}089$

2. 80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que pour chaque personne la probabilité que le portique sonne est égale à 0,021 92.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les 80 personnes de ce groupe.

a. On répète de manière identique et indépendante (situation assimilée à un tirage avec remise) 80 fois de suite cette épreuve. Il s'agit d'un schéma de Bernoulli donc la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0{,}021\,92$.

b. L'espérance d'une loi binomiale est : $E(X) = n \times p = 80 \times 0,02192 = 1,7536$.
Donc par groupe de 80 personnes le portail sonnera un peu moins de 2 fois.

c. On donne les valeurs arrondies à 10^{-3} de :

- la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique :
  $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - (1 - 0,02192)^{80} \approx 0,830$.
- la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique :
  $p(X \leqslant 5) \approx 0,992$ (à la calculatrice).

d. Avec la calculatrice : $p(X \leqslant 2) \approx 0,744$ et $p(X \leqslant 3) \approx 0,901$. Donc $n = 3$.

<u>EXERCICE 3 (6 points</u>)

Voir corrigés des exercices faits en classe