NOM :

CONTROLE DE MATHEMATIQUES N°1 TRIMESTRE 2 . SPECIALITE . DUREE : 2 Heures

Exercice 1 (5 points)

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x + 4 - e^x$

1°) a) Déterminer la limite de f en - ∞.

b) Vérifier que pour tout réel x , $f(x) = x\left(1 + \frac{4}{x} - \frac{e^x}{x}\right)$ puis déterminer la limite de f en + ∞ .

2°) a) Résoudre dans R l'inéquation $1 - e^x \geq 0$.

b) Calculer $f'(x)$ puis étudier son signe en vous aidant du a) .

c) Dresser le tableau de variations de f sur R.

Exercice 2 (6 points)

Partie A. – On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6$.

1. Déterminer la limite de g en + ∞.
2. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x, étudier son signe et en déduire le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}^+$.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}^+$.
4. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
5. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}^+$.

Partie B. – On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 3x + \frac{6}{x}$

On notera C sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) .

1. Déterminer la limite de f à droite en 0 .
2. Que peut-on en déduire pour C ?
3. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
4. On admet que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Dresser le tableau de variation de f où figurera le signe de $f'(x)$.

Partie C.

1. Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1 .
2. ***BONUS*** $^{***+2}$*: Après avoir vérifié que* $(x-1)^2(x+6) = x^3 + 4x^2 - 11x + 6$ *étudier la position relative de la tangente T et de la courbe C.*

Exercice 3(4 points)

Soit f la fonction définie sur $[0;\frac{2}{5}]$ par $f(x) = 1{,}6x - x^2 + 0.16$

1°) a) Justifier que f est continue sur $[0;\frac{2}{5}]$

b) Résoudre l'équation $f(x) = x$ dans $[0;\frac{2}{5}]$.

c) Calculer $f'(x)$ et donner le tableau de variation de f sur $[0;\frac{2}{5}]$.

d) A l'aide du tableau de variation en déduire que si $x \in [0;\frac{2}{5}]$ alors $f(x) \in [0;\frac{2}{5}]$

2°) On définit la suite (U_n) par $\begin{cases} U_0 = 0{,}2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq \frac{2}{5}$

b) Montrer que la suite est convergente.

c) On appelle α la limite de la suite (U_n). Déterminer α.

Exercice 4 (5 points)
QCM
Entourer la réponse juste :

1- La dérivée de la fonction $f(x) = e^{2+3x^2}$ est

$f'(x) = 2e^{2+3x^2}$	$f'(x) = e^{6x}$	$f'(x) = 6xe^{2+3x^2}$	$f'(x) = e^{2+3x^2}$

2- La dérivée de la fonction $f(x) = \ln(3x^2 + 5x + 6)$ est

$f'(x) = \ln(6x + 5)$	$f'(x) = \dfrac{6x+5}{3x^2+5x+6}$	$f'(x) = \dfrac{1}{6x+5}$	$f'(x) = (6x+5)\ln x$

3- Pour tout nombre réel *x* strictement positif : $\ln(x^2 + x)$

$\ln(x^2) \times \ln(x)$	$2\ln(x+1)$	$\ln(x) + \ln(x+1)$	$2\ln(x) + \ln(x+1)$

4- Le nombre $\ln 125 - \ln 81 - \ln \frac{3}{5} + 2\ln\sqrt{243}$ est égal à

$4\ln 5$	$4\ln 5 - \ln 3$	$\ln\left(\frac{5}{4}\right)$	$5\ln 4$

5-Le nombre $\dfrac{e^{\ln 45 - \ln 27}}{e^{\ln 15} \times e^{\ln 81}}$ est égal à

$4\ln 5 - \ln 3$	$\dfrac{1}{729}$	$\dfrac{18}{\ln 15 \times \ln 81}$	2025