CONTROLE DU 14/12/21 terminale spé CORRIGE

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x + 4 - e^x$

1°) a) $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} x + 4 = -\infty$ donc par somme $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Pour tout réel x, $x\left(1 + \frac{4}{x} - \frac{e^x}{x}\right) = x + \frac{4x}{x} - \frac{xe^x}{x} = x + 4 - e^x = f(x)$

$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} -\frac{e^x}{x} = -\infty$ par croissance comparée

Donc par somme

$\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{4}{x} - \frac{e^x}{x} = -\infty$

Et finalement par produit

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

2°) a)

$1 - e^x \geq 0$ équivaut à $1 \geq e^x$ soit à $e^0 \geq e^x$ soit finalement à $0 \geq x$

Donc S =]-∞; 0]

b) $f'(x) = 1 - e^x$. D'après le a) on a donc $f' \geq 0$ si $x \in]-\infty; 0]$ et $f' \leq 0$ si $x \in [0; +\infty[$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f '(x)		+	0	-	
f(x)	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

Exercice 2

Partie A

1. **Limite en + l'infini**

On a une indéterminée du type $\infty - \infty$

$$g\,(x\,) = x^3(2 - \frac{3}{x} - \frac{6}{x^3})$$

$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} -\frac{3}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} -\frac{6}{x^2} = 0$

Donc par sommes de limites

$$\lim_{x \to +\infty} 2 - \frac{3}{x} - \frac{6}{x^2} = 2$$

Et finalement par produit

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

2.g est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$g'(\,x\,) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$. Comme a = 6 c'est-à-dire a>0 D'après la règle du signe du trinôme du second degré on en déduit le signe de g'(x), et le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}^{+*}$:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(\,x\,)$	-6	$\searrow$	-7	$\nearrow$	$+\infty$

3. Sur]0 ;1] $-7 < g$<-6 donc $g < 0$ et l'équation $g(\,x\,) = 0$ n'admet pas de solution dans cet intervalle.

Sur [1 ; + ∞[la fonction g est continue et strictement croissante de l'intervalle, $[1; +\infty[$ à valeurs dans l'intervalle $[-7\,; +\infty[$ qui contient 0, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires relatif aux fonctions strictement monotones l'équation $g(\,x\,) = 0$ admet une unique solution α sur]0 ;+ ∞[.

4. Comme d'après la calculatrice g (2.14) ≈ -0,14 et que g (2.15) = 0.01 alors

g (2.14)x g (2.15) <0 , on en déduit que 2.14 < α < 2.15

5. On en déduit le signe de g sur $[0;+\infty[$

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

Partie B

1. **Limite à droite en 0**

On a une forme indéterminée en + ∞ du type ∞/∞ donc on transforme l'écriture de f(x) et on a :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 - 3x = 0$$

$\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ x>0}} \frac{6}{x} = +\infty$ donc par somme $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$ alors l'axe des ordonnées d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à C

3.La fonction f qui est la somme d'une fonction trinôme du second degré et d'une fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition :

$$f'(x) = 2x - 3 - \frac{6}{x^2} = \frac{(2x-3)x^2-6}{x^2} = \frac{2x^3-3x^2-6}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

4.D'après le 3. $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ or $x^2 > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$ on en déduit que

$f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur R+*. On a donc le tableau de variation de f

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	f(α)	↗	$+\infty$

Partie C

1. T : y = $f'(1)(x-1)+f(1)$ soit T : y = -7$(x-1)+4$ et finalement

T : y = -7$x+11$

2. Méthode 1 :
   On va étudier le signe de h(x) = $f(x)-(-7x+11) = x^2+4x-11+\frac{6}{x}$

Ce qui donne h(x) = $\frac{x^3+4x^2-11x+6}{x}$

Or (x – 1)^2(x +6) = (x^2 – 2x +1)(x + 6) = $x^3+4x^2-11x+6$

Comme $x >$ 0 alors x+6 >0 . De plus (x – 1)^2 ≥ 0 donc h(x) ≥ 0 et C est au – dessus T sur R+*

Méthode 2 : $f''(x) = \frac{2x^3+12}{x^3}$

Comme x>0 alors $f''(x)$ quotient de deux quantités positives est positif et la fonction est convexe sur R+* , on en déduit que C est au dessus de T sur R+*.

Exercice 3

1°)a) f est une fonction trinôme du second degré elle est donc dérivable sur $\left[0;\frac{4}{5}\right]$ et ainsi continue sur cet intervalle.

b) Pour tout x de $\left[0;\frac{4}{5}\right]$ $f(x)=x$ équivaut à $1.6x - x^2+0.16 = x$ $soit$ $-x^2+0.6x+0.16=0$

Δ = 1. On a deux solutions qui sont x1= -$\frac{1}{5}$ et $x_2 = \frac{4}{5}$.

Seule la solution x2 peut -être retenue sur $\left[0;\frac{4}{5}\right]$ donc S = $\left\{\frac{4}{5}\right\}$

c) f '(x) = -2x+1.6 . Il s'agit d'une fonction affine dont le coefficient directeur a=-2 est négatif donc d'après la règle du signe de $ax+b$, *on* en déduit le signe de f '(x), et le tableau de variation de f sur I :

x	0		$\frac{4}{5}$
f '(x)		+	0
f(x)	$\frac{4}{25}$		$\frac{4}{5}$

d) D'après le tableau de variations si x. *dans* $\left[0;\frac{4}{5}\right]$ alors $f(x) \in \left[\frac{4}{25};\frac{4}{5}\right]$ et on a bien $f(x) \in \left[0;\frac{4}{5}\right]$

a) 2°) a) Soit Pn. : $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq \frac{4}{5}$

Initialisation : pour n=0 on a $U_0 = 0.2$ et U1 = 0.44

$0 \leq 0.2 \leq 0.44 \leq \frac{4}{5}$ donc $0 \leq U_0 \leq U_1 \leq \frac{4}{5}$ et P_0 est vraie

Hérédité : On suppose que la propriété est vraie **pour un entier n** fixé c'est-à-dire

$0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq \frac{4}{5}$

Notre objectif est de montrer qu'elle reste vraie au rang n+1 à savoir

$0 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq \frac{4}{5}$

Par hypothèse de récurrence on a $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq \frac{4}{5}$

donc , comme f est strictement croissante sur $\left[0;\frac{4}{5}\right]$ alors

$$f(0) \leq f(U_n) \leq f(U_{n+1}) \leq f(\frac{4}{5})$$

C'est-à-dire $\frac{4}{25} \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq \frac{4}{5}$ et on a finalement

$0 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq \frac{4}{5}$; Pn+1 est donc vraie.

Conclusion : *Conclusion* : P_n est vraie au rang 0, elle est héréditaire, on a démontré par récurrence que

pour tout entier n $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq \frac{4}{5}$

b) On a montré au a) que pour tout entier n $U_n \leq U_{n+1}$ donc
La suite est croissante . De plus pour tout entier n on a aussi montré que $U_n \leq \frac{4}{5}$ c'est-à -dire. (Un) majorée par $\frac{4}{5}$

La suite est croissante et majorée donc d'après. Le théorème de convergence des suites monotones elle converge .

C) la fonction f est continue sur $\left[0;\frac{4}{5}\right]$ et la suite (Un) converge vers α donc d'après le théorème du point fixe la limite α vérifie l'équation $f(\alpha) = \alpha$. Or d'après le 1°). B) la seule solution possible est $\frac{4}{5}$ donc $\alpha = \frac{4}{5}$.

Exercice 4 (5 points)

QCM

Entourer la réponse juste :

1- La dérivée de la fonction $f(x) = e^{2+3x^2}$ est

$f'(x) = 2e^{2+3x^2}$	$f'(x) = e^{6x}$	$f'(x) = 6xe^{2+3x^2}$	$f'(x) = e^{2+3x^2}$

2- La dérivée de la fonction $f(x) = \ln(3x^2 + 5x + 6)$ est

$f'(x) = \ln(6x + 5)$	$f'(x) = \dfrac{6x+5}{3x^2+5x+6}$	$f'(x) = \dfrac{1}{6x+5}$	$f'(x) = (6x+5)\ln x$

3- Pour tout nombre réel *x* strictement positif : $\ln(x^2 + x)$

$\ln(x^2) \times \ln(x)$	$2\ln(x+1)$	$\ln(x) + \ln(x+1)$	$2\ln(x) + \ln(x+1)$

4- Le nombre $\ln 125 - \ln 81 - \ln\frac{3}{5} + 2\ln\sqrt{243}$ st égal à

$4\ln 5$	$4\ln 5 - \ln 3$	$\ln\left(\frac{5}{4}\right)$	$5\ln 4$

5-Le nombre $\dfrac{e^{\ln 45 - \ln 27}}{e^{\ln 15} \times e^{\ln 81}}$ est égal à

$4\ln 5 - \ln 3$	$\dfrac{1}{729}$	$\dfrac{18}{\ln 15 \times \ln 81}$	2025

on en déduit le signe de f ''(x) sur I :

x	$-\infty$		1		4
f '(x)		+	0	-	

b) Comme $f''(x) \geq 0$ sur $]-\infty; 1]$ alors f est convexe sur $]-\infty; 1]$

Comme $f''(x) \leq 0$ sur $[1; 4]$ alors f est concave sur $[1; 4]$

On en déduit que la courbe de f admet un point d'inflexion sur I qui est le point A(1 ; 1)

Exercice 3

1°) a) f est une fonction polynôme sur I donc elle est continue sur I .

b) f(x) = x avec x dans I équivaut à $0,6x(1 - x) + 0.35 = x$ soit à

$-0,6\,x^2 - 0,4\,x + 0,35 = 0$

$\Delta = 1$. On a deux racines distinctes qui sont ½ et -7/6 . Donc dans I on a la seule racine acceptable est ½ . $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

c) f '(x) = - 1,2 x + 0,6 on en déduit le tableau de variation de f sur I :

x	0		½
f '(x)		+	0
$f(x)$	0,35	↗	½

d) D'après le tableau de variation , si x dans I alors

$0,35 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ comme 0,35 >0

Donc on a bien si x dans I alors $f(x)$ dans I

2°) On considère la propriété Pn : $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 0.5$

Initialisation : pour n=0 on a $U_0 = 0$, $U_1 = 0,35$ donc $0 \leq U_0 \leq U_1 \leq 0.5$ et P_0 est vraie

Hérédité : On suppose la propriété vraie **pour un entier naturel n** c'est- à- dire $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 0.5$

Notre objectif est de démontrer que Pn+1 est vraie à savoir $0 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 0.5$

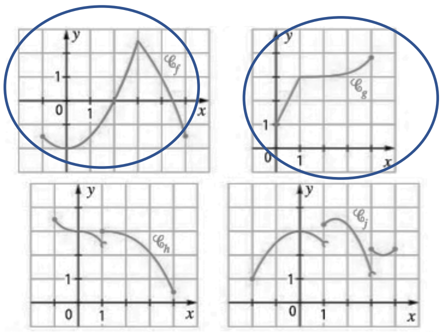
Par hypothèse de récurrence on a donc $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 0.5$
Alors d'après le 1)c), comme f est croissante $f(\ 0\ ) \leq f(U_n\ ) \leq f(U_{n+1}\ ) \leq f(\ 0.5\ )$
et On a finalement D'après le 1)d) $0 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 0.5$
La propriété est donc vraie au rang n+1.
Conclusion : P_n est vraie au rang 0, elle est héréditaire, on a ainsi démontré par récurrence que **pour tout entier naturel n** $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 0.5$.

b) D'après précédemment on sait que (U_n) est croissante puisque **pour tout entier naturel n** $U_n \leq U_{n+1}$ et qu'elle est aussi majorée par 0.5 car **pour tout entier naturel n** $U_n \leq 0{,}5$.
D'après le théorème de convergence monotone (Un) est donc convergente.

c) (Un) est donc convergente de limite a et est une suite définie par récurrence par
$U_{n+1} = f(\ U_n\ )$ avec f qui est une fonction continue. Donc d'après le th du point fixe a est une solution de l'équation a=f(a) avec $a \geq Uo$. D'après le 1b) on a donc a = 0.5 donc $\lim\limits_{n \to +\infty} Un = 0.5$.

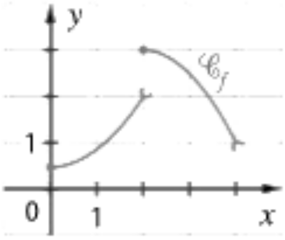
Exercice 4 (4 points)

1) Entourer la(les) courbes de la (des) fonction(s) continue(s) sur leur ensemble de définition :



2)Entourer la réponse juste

f une fonction définie sur l'intervalle [0 ; 4] et dont on donne la représentation graphique dans un repère.



1. La fonction f est-elle continue en 3 ? Oui non

2. La fonction f est-elle continue en 2 ? Oui non

3)

Choisir la ou les bonnes réponses.

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur [−7 ; 10]. On donne ci-dessous le tableau de signes de sa fonction dérivée seconde.

x	−7		−1		2		10
$f''(x)$		−	0	+	0	+	

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

a. f est convexe sur [−1 ; 2].

b. f est concave sur [−5 ; 0].

c. Le point A d'abscisse −1 de $\mathscr{C}_f$ est un point d'inflexion de cette courbe.

d. Le point B d'abscisse 2 de $\mathscr{C}_f$ est un point d'inflexion de cette courbe.

Choisir la ou les bonnes réponses.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. On sait que, pour tout réel x, $x + 1 \leqslant f(x)$.

On peut déterminer :

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ b. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ c. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. On sait que, pour tout réel x, $f(x) \leqslant x + 2$.

On peut déterminer :

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ b. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ c. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.