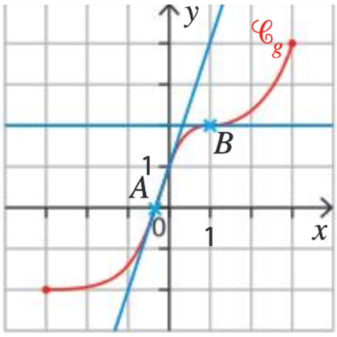
CONTROLE N°1 TRIMESTRE 2 DUREE 40 MN Le 16 /01/2023 SB

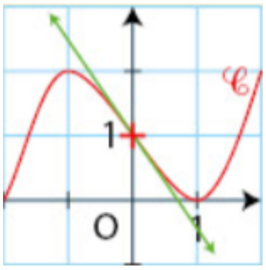
EXERCICE 1 :Dans chaque cas la fonction f dérivable sur I est définie par sa courbe dans un repère. Lire graphiquement les intervalles sur lesquels elle est convexe ou concave.

I = [-3 ;3]



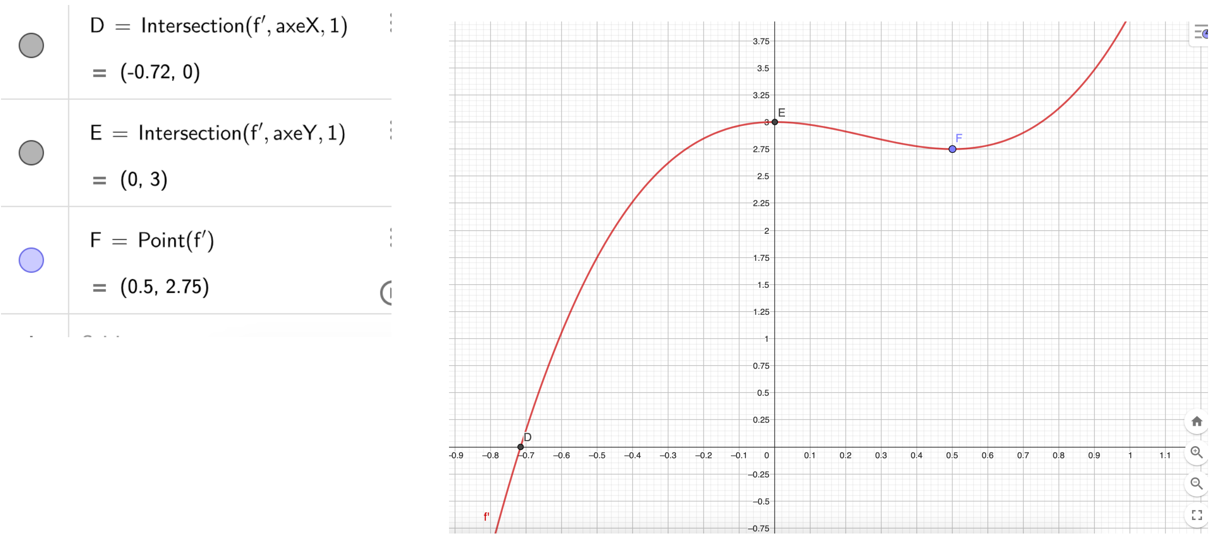
La courbe est au-dessus de ses tangentes sur $[-3;0]$ et sur $[1;3]$ donc f est convexe sur $[-3;0]$ et sur $[1;3]$. La courbe est en-dessous de ses tangentes sur $[0;1]$ donc f est concave sur $[0;1]$

b) I=[-2 ;2]



La courbe est au-dessus de ses tangentes sur $[0;2]$ donc f est convexe sur $[0;2]$. La courbe est en-dessous de ses tangentes sur $[-2;0]$ donc f est concave sur $[-2;0]$

EXERCICE 2 : Soit f la fonction définie et dérivable sur R.
On a ci-dessous la courbe de sa fonction dérivée f ' grâce à un logiciel.



Par lecture graphique on justifiera les réponses aux questions suivantes :

1. Déterminer les variations de *f* sur R

   Comme f '(x) ≤ 0 si x $\in$] - ∞ ; -0.8] alors f est décroissante sur] - ∞ ; -0.8]
   Comme f '(x) ≥ 0 si x $\in$ [-0.8 ; + ∞[alors f est croissante sur [-0.8 ; + ∞[

2. Déterminer la convexité de *f* sur R.

Comme f' est décroissante sur $[0;\ 0.5]$ alors f est convexe sur $[0;\ 0.5]$ .De plus comme f' est croissante sur $[-0.8; 0]$ et sur [0.5 ; + ∞[alors f est convexe sur $[-0.8; 0]$ et sur [0.5 ; + ∞[.

3. La courbe de *f* admet-elle un ou des point(s) d'inflexion ? Déterminer l'abscisse ou les abscisses du ou de ces point(s).

D'après le graphique f' admet deux extrémums locaux en 0 et 0.5 ce qui montre que

f '' s'annule en 0 et 0.5 en changeant de signe alors la courbe de f admet 2 points d'inflexions d'abscisses respectives 0 et 0.5.

<u>EXERCICE 3 :</u> Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = (3x - 4)e^{x}$ et Cf sa courbe représentative.

1°) Déterminer la limite de f en + ∞ .

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} 3x - 4 = +\infty$$

Donc par produit des limites $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2°) a) Après avoir développé l'expression de $f(x)$ déterminer la limite de *f* en - ∞ .

Comme $f(x) = 3x\,e^x - 4\,e^x$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ **donc par produit** $\lim_{x \to -\infty} -4e^x = 0$

$\lim_{x \to -\infty} x\,e^x = 0$ **donc par produit** $\lim_{x \to -\infty} 3xe^x = 0$

Par somme $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

b) Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?

L'axe des abscisses d'équation y =0 est asymptote horizontale au voisinage de +∞

3°) a) On admet que f est deux fois dérivable sur R. Montrer que $f\,'(x) = (3x - 1)e^{x}$

u(x) = 3x – 4   u'(x)=3
v(x) = e^{x} v'(x)= e^{x} (uv)'=u'v+uv'

$\boldsymbol{f\,'(x) = 3e^{x} + (3x - 4)(e^{x}) = (3x-1)\,e^{x}}$

b) Dresser le tableau de variations de *f* sur R

Comme e^x >0 pour tout réel x alors $f'(x)$ est du signe de ($3x$ -1) fonction affine de coefficient directeur 2 positif sur R:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
f '(x)		-	0	+	
f(x)	0	↘	$-3e^{\frac{1}{3}}$	↗	$+\infty$

4°) a) Calculer $f\,''(x)$.

u(x) = $\boldsymbol{3x-1}$ u'(x)=3
v(x) = e^{x} v'(x)= e^{x} (uv)'=u'v+uv'

$f\,''(x) = 3e^{x} + (3x-1)(e^{x}) = (3x+2)\,e^{x}$

b) Étudier la convexité de *f* et donner l'(les) abscisse(s) du (ou des) point(s) d'inflexion éventuel(s).

Comme $e^x > 0$ alors f ''(x) est du signe de $(3x+2)$ donc
Comme f ''(x) ≥ 0 si x $\in \left[-\frac{2}{3};\ +\infty\right[$ alors f est convexe sur $\left[-\frac{2}{3};\ +\infty\right[$
Comme f ''(x) ≤ 0 si x $\in \left]-\infty; -\frac{2}{3}\right]$ alors f est concave sur $\left]-\infty; -\frac{2}{3}\right]$
Comme f'' s'annule en changeant de signe en $-\frac{2}{3}$, la courbe de f admet donc un point d'inflexion au point d'abscisse $-\frac{2}{3}$ de coordonnées $(-\frac{2}{3}; -6e^{-\frac{2}{3}})$.

5°) a) Calculer **la valeur exacte** de $f(1)$ *et de* $f\,'(1)$

$$f(1) = -e \ \ et\ \ f\,'(1) = 2e$$

b) Déterminer une équation de la tangente T au point *d'abscisse* 1

T : y = f ’(1) (x - 1) + f(1)

T : y= 2e (x – 1) – e

T : y = 2ex – 3e

6°) A l’aide du 4°)b) étudier la position relative de Cf et T.

Comme f est convexe sur $\left[-\frac{2}{3};\ +\infty\right[$ alors la courbe Cf est au-dessus de ses tangentes sur $\left[-\frac{2}{3};\ +\infty\right[$ donc la courbe Cf est au-dessus de T tangente au point d’abscisse 1.