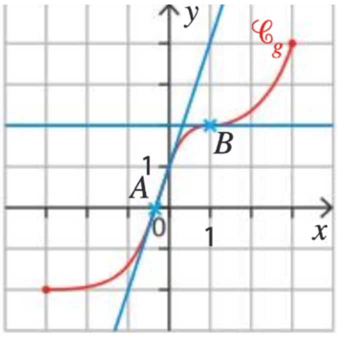
**CONTROLE N°1 TRIMESTRE 2 DUREE 40 MN  Le 16 /01/2023 SB**

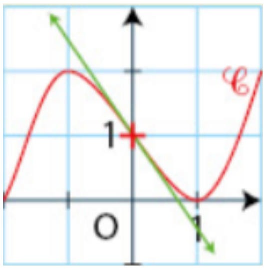
**EXERCICE** 1 :Dans chaque cas la fonction f dérivable sur I est définie par sa courbe dans un repère. Lire graphiquement les intervalles  sur lesquels elle est convexe ou concave.

I = [-3 ;3]



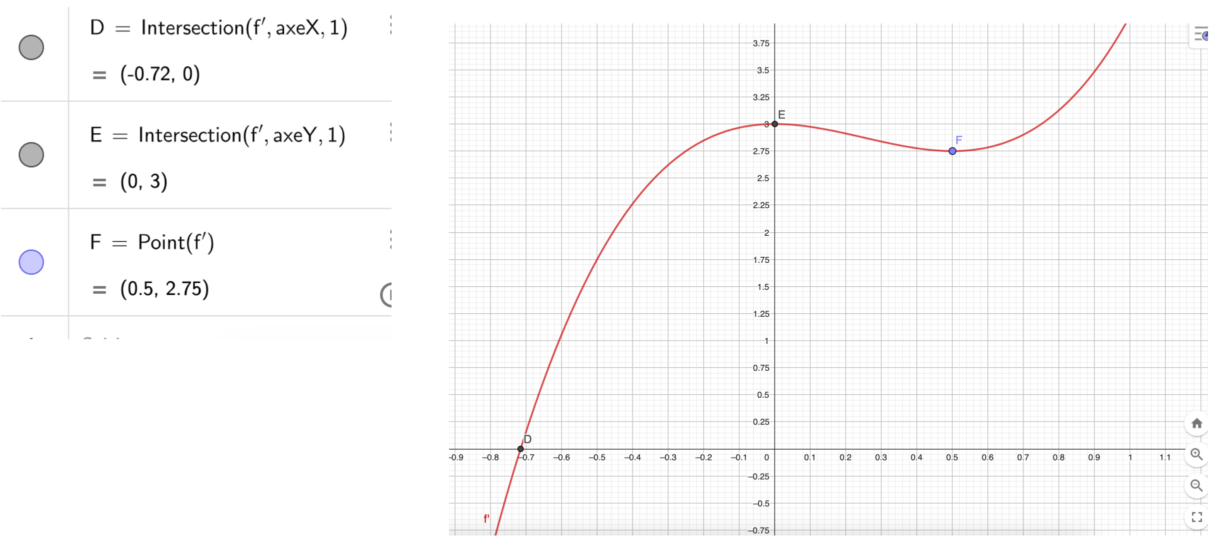

La courbe est au-dessus de ses tangentes sur $[-3;-0.3]$ et sur $[1;3]$ donc f est convexe sur $[-3;-0.3]$ et sur $[1;3]$. La courbe est en-dessous de ses tangentes sur $[-0.3;1]$  donc f est concave sur $[-0.3;1]$

b) I=[-2 ;2]




La courbe est au-dessus de ses tangentes sur $[0;2]$ donc f est convexe sur $[0;2]$. La courbe est en-dessous de ses tangentes sur $[-2;0]$  donc f est concave sur $[-2;0]$

**EXERCICE 2 :**Soit f la fonction définie et dérivable sur R.
On a ci-dessous la courbe de sa fonction dérivée f ' grâce à un logiciel.



Par lecture graphique on justifiera les réponses aux questions suivantes :

1. Déterminer les variations de *f* sur R

   **Comme f '(x) $\leq$ 0 si x $\in$ ] - $\infty$ ; -0.61] alors f est décroissante sur ] - $\infty$ ; -0.61]**
   **Comme f '(x) $\geq$ 0 si x $\in$ [-0.61 ; + $\infty$[ alors f est croissante sur [-0.61 ; + $\infty$[**

2. Déterminer la convexité de *f* sur R.

**Comme f' est décroissante sur $[0;\ 0.5]$ alors f est convexe sur $[0;\ 0.5]$ .De plus comme f' est croissante sur ] - $\infty$ ; 0] et sur [0.5 ; + $\infty$[ alors f est convexe sur ] - $\infty$ ; 0] et sur [0.5 ; + $\infty$[ .**

3. La courbe de *f* admet-elle un ou des point(s) d'inflexion ? Déterminer l'abscisse ou les abscisses du ou de ces point(s).

**D'après le graphique f' admet deux extrémums locaux en 0 et 0.5 ce qui montre que**

**f '' s'annule en 0 et 0.5 en changeant de signe alors la courbe de f admet 2 points d'inflexions d'abscisses respectives 0 et 0.5.**

<u>**EXERCICE 3 :**</u> Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = (3x - 4)e^{x}$ et Cf sa courbe représentative.

1°) Déterminer la limite de f en + $\infty$ .

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} 3x - 4 = +\infty$$

**Donc par produit des limites** $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2°) a) Après avoir développé l'expression de $f(x)$ déterminer la limite de $f$ en - $\infty$ .

**Comme** $f(x) = 3x\,e^{x} - 4\,e^{x}$

$\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ **donc par produit** $\lim_{x\to-\infty} -4e^{x} = 0$

$\lim_{x\to-\infty} x\,e^{x} = 0$ **par croissance comparée donc par produit** $\lim_{x\to-\infty} 3xe^{x} = 0$

**Par somme** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

b) Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?

**L'axe des abscisses d'équation y =0 est asymptote horizontale au voisinage de +$\infty$**

3°) a) On admet que f est deux fois dérivable sur R. Montrer que $f\,'(\,x\,) = (3x - 1\,)e^{x}$

**u(x) = 3x – 4     u'(x)=3**
**v(x) = $e^{x}$     v'(x)= $e^{x}$          (uv)'=u'v+uv'**

$\boldsymbol{f\,'(\,x\,) \;=\; 3e^{x} \;+(3x -\; 4)(\,e^{x}) = \;(3x - 1)\;e^{x}}$

b) Dresser le tableau de variations de *f* sur R

**Comme e$^{x}$ >0 pour tout réel x alors $f'(x)$ est du signe de ( $3x$ -1 ) fonction affine de coefficient directeur 2 positif sur R:**

| x | $-\infty$ | | $\frac{1}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f '($x$) | | - | 0 | + | |
| f($x$) | 0 | ↘ | $-3e^{\frac{1}{3}}$ | ↗ | $+\infty$ |

4°) a) Calculer *f* ''( *x* ) .

u(x) = $\boldsymbol{3x - 1}$     u'(x)=3
v(x) = $e^{x}$     v'(x)= $e^{x}$          (uv)'=u'v+uv'

$f\,''(\,x\,) \;=\; 3e^{x} \;+(3x - 1)(\,e^{x}) = \;(3x + 2)\;e^{x}$

b) Étudier la convexité de *f* et donner l'(les) abscisse(s) du (ou des) point(s) d'inflexion éventuel(s).

**Comme e$^{x}$ > 0 alors f ''($x$) est du signe de $(3x\; + 2)$ donc**
**Comme f ''(x) $\geq$ 0  si x $\in \left[-\frac{2}{3};\; +\infty\right[$ alors f est convexe sur $\left[-\frac{2}{3};\; +\infty\right[$**
**Comme f ''(x) $\leq$ 0  si x $\in \left]-\infty; -\frac{2}{3}\right]$  alors f est concave sur $\left]-\infty; -\frac{2}{3}\right]$**
**Comme f'' s'annule en changeant de signe en $-\frac{2}{3}$, la courbe de f admet donc un point d'inflexion au point d'abscisse $-\frac{2}{3}$ de coordonnées ($-\frac{2}{3}$; $-6e^{-\frac{2}{3}}$ ) .**

5°) a) Calculer **la valeur exacte** de $f(\,1\,)$ *et de* $f\,'(\,1\,)$

$$f(\,1\,) = \;-e \;\;et\;\; f\,'(\,1\,) = \;2e$$

b) Déterminer une équation de la tangente T au point *d'abscisse* 1

**T : y = f '(1) ( $x$ - 1) + f(1)**

**T : y= 2e ( $x$ – 1 ) – e**

**T : y = 2e$x$ – 3e**

6°) A l'aide du 4°)b) étudier la position relative de Cf et T.

**Comme f est convexe sur $\left[-\frac{2}{3};\ +\infty\right[$ alors la courbe Cf est au-dessus de ses tangentes sur $\left[-\frac{2}{3};\ +\infty\right[$ donc la courbe Cf est au-dessus de T tangente au point d'abscisse 1.**