CONTROLE N°1 TS2 20/10/2017 CORRIGE

Exercice 1

Partie A

1°) $x^2 + 6x - 7 = 0$

$\Delta = 64$ le trinôme admet deux racines qui sont x_1 = 1 et x_2 = -7 . S = $\{-7; 1\}$

2°) $x^2 + x + 4 < 0$

$\Delta = -15$. D'après la règle sur le signe du trinôme l'ensemble des solutions de l'inéquation est S = ∅

3°) -3x^2 -2x +1≤0

-1 est une solution évidente donc l'autre solution est - $\frac{c}{a}$ c'est-à-dire $\frac{1}{3}$. D'après la règle sur le signe du trinôme on a donc S = $\left[-1; \frac{1}{3}\right]$

Partie B

On considère le trinôme $x^2 - x - 6$ **$\Delta = 25$ le trinôme admet deux racines qui sont x_1 = -2 et x_2 = 3 . S = $\{-2; 3\}$**

D'après le 1°) de la partie A , on en déduit que l'inéquation est définie si $x \in$ R\ $\{-7; 1\}$

D'après la règle sur le signe du trinôme on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-7	-2	1	3 $+\infty$
$x^2 - x - 6$	+	+	0 -	-	0 +
$x^2 + 6x - 7$	+	0 -	-	0 +	+
$\frac{x2 - x - 6}{x^2+2x+3}$	+	‖ –	0 +	‖ –	0 +

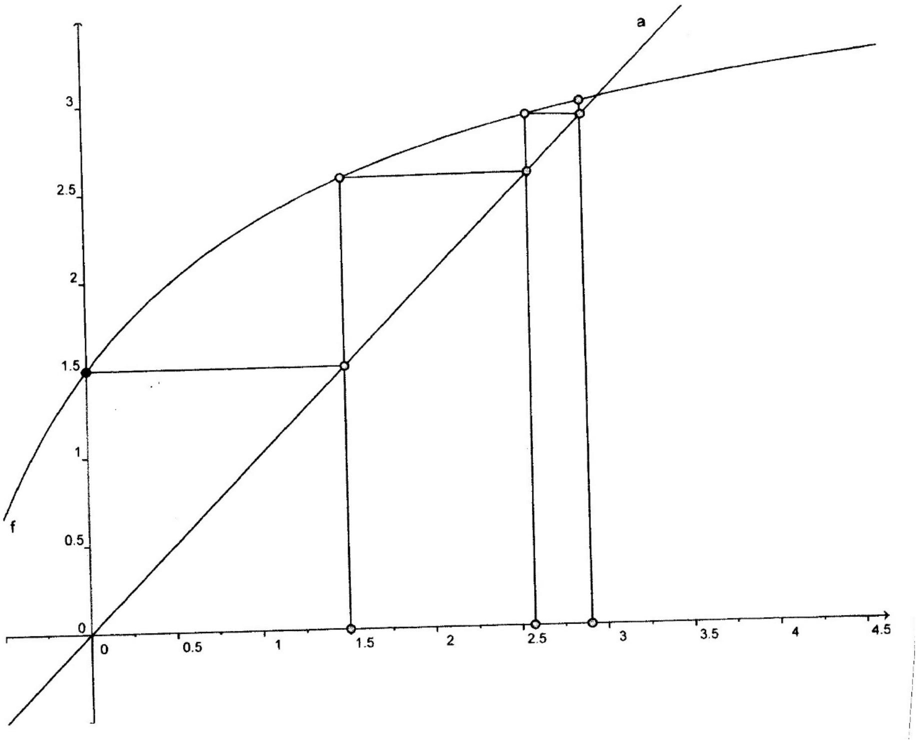
S =$]-7; -2[$ U $]1; 3[$

<u>Exercice 2</u>

1°) a) 1°) a) f '(x) = $\frac{4(x+2)-1(4x+3)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$.

x	0 3
f '(x)	+
f(x)	$\frac{3}{2}$ ↗ 3

Donc si 0≤ $x \leq 3$ alors $0 < \frac{3}{2} \leq f(x) \leq 3$ c'est-à-dire 0≤ $f(x) \leq 3$, et f(x) ∈ I



b)

la suite semble croissante et semble converger vers 3

2°) a) Soit la propriété P_n : $U_n \in I$

Initialisation : pour n=0 on a $U_0 = 0$, donc $0 \leq U_0 \leq 3$ et P_0 est vraie

Hérédité : On suppose la propriété vraie **pour un entier naturel n** càd $0 \leq U_n \leq 3$

Alors d'après le 1)a), $f(U_n\ ) \in I$ c'est-à-dire $U_{n+1} \in I$ et la propriété est vraie au rang n+1.

Conclusion : P_n est vraie au rang 0, elle est héréditaire, on a donc démontré par récurrence que **pour tout entier naturel n,** $U_n \in I$.

b)

$U_{n+1} - U_n = \frac{4U_n+3}{U_n+2} - U_n = \frac{4U_n+3-U_n{}^2-2U_n}{U_n+2} = \frac{-U_n{}^2+2U_n+3}{U_n+2}$

Or $(U_n + 1)(3 - U_n) = -U_n{}^2 + 2U_n + 3$ donc on a bien pour tout entier naturel n

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n + 1)(3 - U_n)}{U_n + 2}$$

<u>Etude du sens de variation</u>

Pour tout entier naturel n

comme $U_n \leq 3$ alors $3 - U_n \geq 0$ et de plus $U_n + 1 > 0$ ainsi que $U_n + 2 > 0$, on en déduit donc que $U_{n+1} - U_n \geq 0$ soit finalement $U_{n+1} \leq U_n$ pour tout entier naturel n . La suite (U_n) est donc croissante.

3°) a) V_0= -3 V_1= $-\frac{3}{5}$ V_0= $-\frac{3}{25}$

b) Pour tout entier naturel n

$$V_{n+1}=\frac{U_{n+1}-3}{U_{n+1}+1}=\frac{\frac{4U_n+3}{U_n+2}-3}{\frac{4U_n+3}{U_n+2}+1}=\frac{\frac{4U_n+3-3U_n-6}{U_n+2}}{\frac{4U_n+3+U_n+2}{U_n+2}}=\frac{\frac{U_n-3}{U_n+2}}{\frac{5U_n+5}{U_n+2}}=\frac{U_n-3}{5(U_n+1)}=\frac{1}{5}V_n$$

On en déduit que la suite (V_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $V_0=-3$

D'où $V_n=-3\left(\frac{1}{5}\right)^n$

c) $V_n=\frac{U_n-3}{U_n+1}$ équivaut à $V_n(U_n+1)=U_n-3$ soit à $U_nV_n+V_n=U_n-3$

c'est-à-dire $U_nV_n-U_n=-V_n-3$

$U_n(V_n-1)=-V_n-3$

$U_n(V_n-1)=-(V_n+3)$

d'où finalement $U_n=\frac{V_n+3}{1-V_n}$

On en déduit que $U_n=\frac{-3\left(\frac{1}{5}\right)^n+3}{1+3\left(\frac{1}{5}\right)^n}=3\,\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1+3\left(\frac{1}{5}\right)^n}$

d) Comme $-1<\frac{1}{5}<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n=0$ et par somme puis par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=3$.

EX 3

1- $\lim\limits_{n\to+\infty}5^n-4^n=\lim\limits_{n\to+\infty}5^n\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)=+\infty$ par somme puis par produit

sachant que comme $-1<\frac{4}{5}<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n=0$ et que comme $5>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(5)^n=+\infty$

2 - Pour tout entier naturel n, $-1\leq\cos n\leq 1$.

On a donc $3-2n\leq 3\cos n-2n+6\leq 9-2n$ soit

$3-2n\leq U_n\leq 9-2n$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}9-2n=-\infty$

Alors d'après le théorème de comparaison des limites et par majoration $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=-\infty$

3- a) $U_n=4\left(\frac{1}{3}\right)^n$

comme $-1<\frac{1}{3}<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$

b)

$S_n=4\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{12}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)=6\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$

comme $-1<\frac{1}{3}<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ donc par somme

$\lim\limits_{n\to+\infty}1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}=1$ puis par produit $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=6$.