CONTRÔLE DE MATHEMATIQUES TERMINALE SPECIALITE 12/10/2020 DUREE : 2 H

Exercice 1 (4 points)

Soit la suite (U_n) définie par $U_n = \frac{5n-2}{2n+1}$

1°) Calculer U_0 , U_1 et U_2

2°) a) Vérifier que $U_{n+1} - U_n = \frac{9}{(2n+3)(2n+1)}$

b) En déduire la monotonie de la suite.

3°) Montrer que (U_n) est majorée par $\frac{5}{2}$.

4°) En déduire que la suite est convergente sans utiliser les propriétés sur les opérations des limites.

Exercice 2 (6 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A

Déterminer la limite des suites suivantes :

1°) (U_n) est la suite définie par $U_n = n^2 + n + 10$

2°) (V_n) est la suite définie par $V_n = 3n^4 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^3}$

3°) (W_n) est la suite définie par $W_n = \frac{n^2-2n+7}{4n^3\_-1}$

4°) (T_n) est la suite définie par $T_n = 3^n - 4^n$

Partie B

(U_n) est la suite définie par $U_n = 3 + \frac{n\cos(n)}{2n^2+1}$

1°) Montrer que pour tout entier naturel n

$$3 - \frac{n}{2n^2+1} \leq U_n \leq 3 + \frac{n}{2n^2+1}$$

2°) En déduire la limite de la suite (U_n).

Exercice 3(3 points)

On considère la suite (U_n) définie par $U_n = 1 + \frac{3}{5} + \frac{9}{25} + \ldots + (\frac{3}{5})^n$

Déterminer la limite de la suite (U_n) .

Exercice 4 (7 points)

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.
La société met en place le dispositif industriel suivant.
Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.
L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (U_n) définie de la façon

suivante : $U_0 = 1\,000$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 1{,}2U_n - 100$.

1) a) Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé. On précisera en particulier ce que représente u_n.

b) L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

c) On peut également utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème posé dans la question précédente. Recopier et compléter cette fonction Python:

```
def  ran() :
    u =1 000
    n = 0
    While ................................... :

        u =................................

         n =n + 1

     return  ..........
```

2) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $U_n \geq 1000$.
b) Démontrer que la suite (U_n) est croissante.
3) On définit la suite (V_n) par : pour tout entier naturel n, $V_n = U_n - 500$.

a) Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique.
b) Exprimer V_n, puis U_n, en fonction de n.
c) Déterminer la limite de la suite (U_n).