CONTROLE N°1 TS2 20/10/2017 CORRIGE

Exercice 1

Partie A

1°) $x^2 + 2x - 3 = 0$

le trinôme admet une racine *évidente qui* vaut 1 , l'autre racine est $\frac{c}{a}$ **= - 3 . S =** $\{-3; 1\}$

2°) -2$x^2 + 3x - 1 \geq 0$

1 est une solution évidente donc l'autre solution est $\frac{c}{a}$ c'est-à-dire 0.5 . D'après la régle sur le signe du trinôme on a donc S =$[0.5; 1]$.

Partie B

On peut déduire du 1°) de la partie A que **l'inéquation est définie si $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$.**

De plus $-5x^2 + 6x + 8$ a pour discriminant $\Delta = 196$ x1 = - 0,8 x2 = 2

D'après la règle sur le signe du trinôme on a donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-3	-0.8	1	2 $+\infty$
$-3x^2 + 6x + 10$	-	-	0 +	+	0 -
$x^2 + 2x - 3$	+	0 -	-	0 +	+
$\dfrac{-3x^2 + 6x + 10}{x^2 + 2x - 3}$	-	|| +	0 -	|| +	0 -

S $=]-3; -0.8[\cup]1; 2[$

Exercice 2

1°) Le graphique suggère la croissance de la suite et la convergence vers 5 de la suite (U_n).

2°) a)

$f'(x) = \frac{18}{(x+4)^2}$ donc $f' > 0$ sur I et on a le tableau de variations suivant :

x	0	5
$f(x)$	2.5 ↗	5

b)

On définit la propriété P_n : $U_n \leq U_{n+1}$

Initialisation : Au rang 0 on a $U_0 = 0$ et $U_1 = \frac{17}{5}$ donc $U_0 \leq U_1$ et P_0 est vraie

Hérédité : On suppose la propriété vraie **pour un entier n** fixé càd $U_n \leq U_{n+1}$. L'objectif est de montrer que $U_{n+1} \leq U_{n+2}$.

D'après l'hypothèse de récurrence on a $U_n \leq U_{n+1}$. De plus Un ∈ I et Un+1 ∈ I .
Alors comme f est croissante sur I , nécessairement $f(U_n) \leq f(U_{n+1})$ càd $U_{n+1} \leq U_{n+2}$ et la propriété P_{n+1} est vraie.

Conclusion : P_n est vraie au rang 0, elle est héréditaire, donc d'après le raisonnement par récurrence on a démontré que **pour tout entier n** , $U_n \leq U_{n+1}$.

c) On en déduite que la suite (Un) est croissante. De plus elle est majorée par 5 donc d'après le théorème de convergence monotone (Un) est convergente.

3°)

Pour tout entier naturel n

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}+2}{U_{n+1}-5} = \frac{\frac{7U_n+10}{U_n+4}+2}{\frac{7U_n+10}{U_n+4}-5} = \frac{\frac{7U_n+10}{U_n+4}+\frac{2U_n+8}{U_n+4}}{\frac{7U_n+10}{U_n+4}-\frac{5U_n+20}{U_n+4}} = \frac{\frac{9U_n+18}{U_n+4}}{\frac{2U_n-10}{U_n+4}} = \frac{9(U_n+2)}{2(U_n-5)} = \frac{9}{2}V_n$$

On en déduit que la suite (V_n) est géométrique de raison $\frac{9}{2}$ et de premier terme $V_0 = \frac{-2}{5}$

D'où $V_n = \frac{-2}{5}\left(\frac{9}{2}\right)^n$

b) $V_n = \frac{U_n+2}{U_n-5}$ équivaut à $V_n(U_n - 5) = U_n + 2$ soit à $U_nV_n - 5V_n = U_n + 2$

c'est-à-dire $U_nV_n - U_n = 5V_n + 2$

$U_n(V_n - 1) = 5V_n + 2$

d'où finalement $U_n = \frac{5V_n+2}{V_n-1}$.

On en déduit que $U_n = \dfrac{-2\left(\frac{9}{2}\right)^n+2}{\frac{-2}{5}\left(\frac{9}{2}\right)^n-1} = 5\,\dfrac{\left(\frac{9}{2}\right)^n-1}{\left(\frac{9}{2}\right)^n+2.5}$

c) $U_n = 5.\dfrac{\left(\frac{9}{2}\right)^n\left(1-\left(\frac{2}{9}\right)^n\right)}{\left(\frac{9}{2}\right)^n\left(1+2.5\left(\frac{2}{9}\right)^n\right)} = 5\,\dfrac{1-\left(\frac{2}{9}\right)^n}{1+2.5\left(\frac{2}{9}\right)^n}$

Comme $0<\frac{2}{9}<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^n = 0$ et par somme puis par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty}$ Un= 5.

<u>Exercice 3</u>

1 – $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 - 3n^2 + 2 = \lim\limits_{n\to+\infty} n^3\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^3}\right)$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-3}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n^3} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^3} = 1$ puis par produit

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^3}\right) = +\infty$.

Et

$\lim\limits_{n\to+\infty}$ Un = $+\infty$

2- $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5^{n+2} - 4^{n-1}}{2^n + 3.5^n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5^n\left(25 - \frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)}{5^n\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n + 3\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{25 - \frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^n}{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 3} = \dfrac{25}{3}$ par somme puis par quotient

sachant que comme $0<\frac{4}{5}<1$ et $0<\frac{2}{5}<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$

3 - Pour tout entier naturel n, $-1 \leq \cos n \leq 1$.

On a donc $n^2 - 5n - 4 \leq n^2 + 5n\cos n - 4 \leq n^2 + 5n - 4$ soit

$$\frac{n^2-5n-4}{n+2} \leq U_n \leq \frac{n^2+5n-4}{n+2}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2-5n-4}{n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n(1-\frac{5}{n}-\frac{4}{n^2})}{1+\frac{2}{n}}$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-5}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{4}{n^2} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{5}{n} - \frac{4}{n^2} = 1$ puis par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1 - \frac{5}{n} - \frac{4}{n^2}) = +\infty$.

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{2}{n} = 1$ et par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2-5n-4}{n+2} = +\infty$

Alors d'après le théorème de comparaison des limites et par minoration $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

4 - $U_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \ldots + (\frac{1}{5})^n = \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}\left(1 - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$

comme $0 < \frac{1}{5} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ donc par somme puis par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{5}{4}$.

5 - $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3-\sqrt{n}}{4n+5} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\frac{3}{\sqrt{n}}-1}{4+\frac{5}{n}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{n}} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{n}} - 1 = -1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n} + 4 = 4$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{n}}-1}{4+\frac{5}{n}} = -0{,}25$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

Exercice 4

1°)Sur chacun des intervalles $]-\infty ;1[$ et $[1 ; 4]$ et $]4 ; +\infty[$ f coïncide avec une fonction polynôme ou une fonction affine : elle est donc continue sur chacun de ces intervalles.

Remarque : attention il est nécessaire de montrer d'abord la continuité de f sur les intervalles $]-\infty ;3[$ et $]3 ; 4[$ et $]4 ; +\infty[$ comme cela vient d'être fait ci-dessus.

<u>Etude de la continuité en 1</u>

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x = 1$$

De plus

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x^2 = 1 = f(1) .$$

On en déduit que

$\lim f(x) = f(1)$ f est bien continue en 1

$x \to 1$

Etude de la continuité en 4

$\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x < 4}} x^2 = 16 = f(4)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x > 4}} 8\sqrt{x} = 16$.

On en déduit que

$\lim\limits_{x \to 4} f(x) = f(4)$ f est bien continue en 4

On en déduit finalement que f est pas continue sur R .

2°)

Sur]-1 ; 1[: a , b , d continues ; cnon continues

sur [0 ; 2] a est continue , b, c, d non continues .