FONCTION EXPONENTIELLE

I - Définition et propriétés

1°) Rappel : On a vu dans le chapitre sur la fonction logarithme népérien que pour tout entier relatif p,

$$\boxed{\ln e^p = p}$$

Cette propriété est vraie en réalité pour tout réel x . En effet :

2°) Définition

La fonction exponentielle, notée exp, est la fonction définie sur R à valeur dans]0 ; + ∞ [par :

$$\exp : R \to]0 ; +\infty[$$
$$x \to e^x \quad \text{où} \quad y = e^x \text{ équivaut à } \ln y = x$$

on dit que la fonction exp est la **fonction réciproque** de la fonction ln

3°) Propriétés immédiates

- e^x est définie pour tout x de R
- e^x est strictement positif pour tout x de R.
- $\ln e^x = x$ pour tout x de R.
- $e^{\ln x} = x$ pour tout x de]0 ; + ∞[
- $e^0 = 1$
- $e^1 = e$

Exercice : Simplifier les écritures suivantes

a) $\ln e^{-1} =$ b) $\ln e^2 =$ c) $\ln\sqrt{e} =$ d) $\ln \frac{1}{\sqrt{e}} =$ e) $e^{\ln 3} =$ f) $e^{2\ln 2} =$ g) $e^{-\ln 10} =$

II)Formules fondamentales

Remarque : « çà fonctionne comme les puissances »

Pour tous réels a et b on a

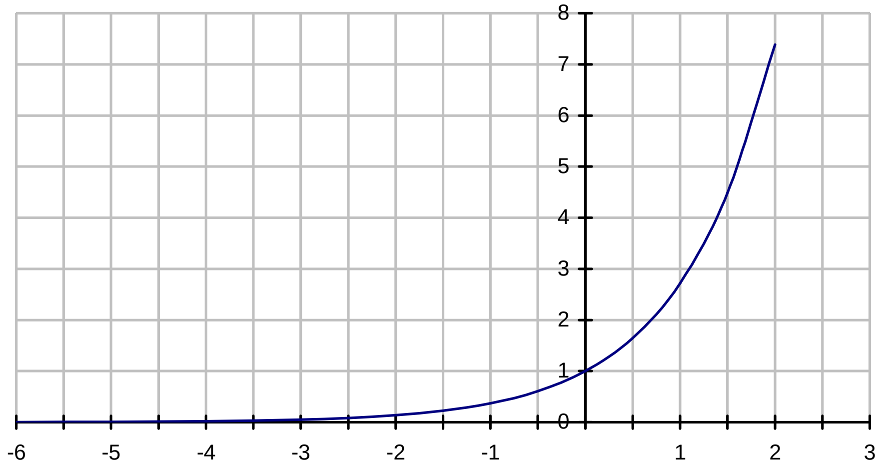
- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
- $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- $(e^a)^n = e^{na}$ pour tout entier n

Exercice : Simplifier ou transformer les écritures suivantes

a) $e^{\ln 3+2} =$ b) $e^{2\ln 2-4} =$ c) $e^{-\ln 10} =$ d) $e^{2x} =$ e) $e^{3x-\ln 4} =$

III)Etude des variations

1°) Variations



a) Limites

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

Interprétation graphique : L'axe des abscisses d'équation $y=0$ est asymptote horizontale à la courbe au voisinage de - ∞

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

b)Dérivée, signe de la dérivée et sens de variation .

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

Comme $e^x > 0$ pour tout x de R alors la fonction *exp* est strictement croissante sur R.

c)Tableau de variation

x	-∞	+∞
(*exp*)'	+	
exp	0 ↗	+∞

2°) Equations, inéquations

Pour tout a et b de R

$e^a = e^b$ équivaut à $a = b$

$e^a \leq e^b$ équivaut à $a \leq b$ $\qquad$ $e^a \geq e^b$ équivaut à $a \geq b$

$e^a < e^b$ équivaut à $a < b$ $\qquad$ $e^a > e^b$ équivaut à $a > b$

Exercices : Résoudre dans R les équations et inéquations suivantes

a) $e^x = e^2$ b) $e^x = 2$ c) $e^x = 0$ d) $e^{3x+2} = e^{x-1}$ e) $e^x = 1$ f) $e^x - 1 > 0$ g) $3e^x - 2 \leq 0$

3°) Autres limites

$\lim_{x \to -\infty} x e^{x} = 0$	$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$
$\lim_{x \to -\infty} x^{n} e^{x} = 0$ pour tout $n \in N$	$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x^{n}} = +\infty$ pour tout $n \in N$

III) Derivation et primitive

1°) Dérivées

Théorème Soit U une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de R alors e^{U} est dérivable sur I et

$$\boxed{(e^{U})' = U' e^{U}}$$

Exemples :

$(e^{2x})' = 2 e^{2x}$ $\qquad$ $(e^{-x})' =$ $\qquad$ $(e^{x2 + 1}) =$

A retenir : soit a une constante réelle

$$\boxed{(e^{ax})' = a e^{ax} \qquad (e^{-ax})' = a e^{-ax}}$$

2°) Primitives

Théorème Soit U une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de R alors les primitives De $U'e^{U}$ sont les fonctions $e^{U} + C$, C dans R.

Exemples : primitives de e^{-x} c'est e^{-x} + C, C ds R et de e^{ax} c'est e^{ax}/a + C, C ds R.

IV) Définition de a^{b} (où a >0 et b réel). Racine n-ième

1°) Définition

Pour tout réel a >0 et tout réel b $\qquad \boxed{a^{b} = e^{b\ln a}}$

Exemples : $2^{0.5} = e^{\frac{1}{2}\ln 2} = \sqrt{2}$; $4^{-1.78} = e^{-1.78\ln 4} \approx$ $\qquad 1{,}68^{1.2} = e^{1.2\ln 1.68} \approx$

2°) Racine n-ième

Théorème Pour tout $n \in N^{*}$ et tout x de $[0 ; +\infty[$ et y de $[0 ; +\infty[$ on a

$$\boxed{y = \sqrt[n]{x} = x^{1/n} \quad \text{équivaut à} \quad x = y^{n}}$$

Exemple : $\sqrt[3]{8} = (2^{3})^{1/3} = 2$; $y = \sqrt[3]{x}$ équivaut à $x = y^{3}$.