Equations et inéquations du premier degré. Signe de a x +b

- (a $\neq$ 0) a x + b = 0 équivaut à x = - b/a.

Ex : Résoudre dans R l'équation $-3x + 4 = 0$.

-

x	$-\infty$	$-b/a$	$+\infty$
a x + b	signe(-a)	0	signe(a)

Ex : Donner à l'aide d'un tableau le signe sur R en fonction de x de :

a) $2x - 1$ b) $-3x + 5$

x	$-\infty$	1/2	$+\infty$
$2x - 1$	-	0	+

x	$-\infty$	5/3	$+\infty$
$-3x + 5$	+	0	-

- **A. B = 0 équivaut à** A = 0 ou à B = 0

- **<u>REGLE DES SIGNES</u>**

x

+	+	+
–	–	+
–	+	–
+	–	–

- **<u>Identités remarquables</u>**.

ATTENTION : ne pas écrire ax^2 en pensant à $(ax)^2$ car $\mathbf{(ax)^2 = a^2 x^2}$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$(ax + b)^2 = (ax)^2 + 2.(ax)b + b^2 = a^2x^2 + 2.a.b.x + b^2$

$(ax - b)^2 = (ax)^2 - 2.(ax)b + b^2 = a^2x^2 - 2.a.b.x + b^2$

$(ax + b)(ax - b) = (ax)^2 - b^2 = a^2x^2 - b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3.a^2b + 3.ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3.a^2b + 3.ab^2 - b^3$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

- **<u>Valeur absolue</u>**

$$|x| = \begin{cases} \mathbf{x \quad si \quad x \geq 0} \\ \mathbf{-x \quad si \quad x \leq 0} \end{cases}$$

| **a** | = | **b** | équivaut à **a = b** ou **a = - b**

Si a >0

$|x| \leq a$ équivaut à x dans [- a ; a]

$|x| \geq a$ équivaut à x dans] $-\infty$;-a] U [a ; + ∞[.

Equations et inéquations du second degré. Signe de ax^2 + bx + c

I) Equations du second degré.

1°)Généralités

Définition 1

Une équation du second degré est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a,b,c sont des réels donnés avec **a≠0.**

Exemples :

$3x^2 + 5x + 4 = 0$ a= 3, b = 5 , c = 4

$x^2 - 2x - 7 = 0$ a= 1, b = -2 , c = -7.

Remarque : Il n'y a « rien » devant x^2 , le « 1 » est « caché » ou sous – entendu puisque 1 x x^2 = x^2 !

Attention : $(x + 2)^2 = x^2 + x + 1$ n'est pas une équation du second degré.

En effet si on développe le terme de droite à savoir $(x + 1)^2$ on obtient l'équation équivalente suivante $x^2 + 4x + 4 = x^2 + x + 1$ soit $3x + 3 = 0$ qui est une équation du premier degré qui admet – 1 pour solution.

Définition 2:

a,b,c 3 réels donnés (a≠0).La fonction f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to ax^2 + bx + c$ est appelée ***fonction trinôme du second degré***.

2°) Résolution et factorisation.

a)La forme canonique

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. On démontre que (voir partie exercices)

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Cette écriture est la ***forme canonique*** du trinôme.

Définition 3 :Le réel $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$. On peut alors écrire :

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Exemples : $x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$

$$4x^2 - x + 3 = 4\left[\left(x - \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{48}{64}\right]$$

b)Résolution et factorisation . Grâce à la forme canonique on démontre le théorème suivant :

Théorème 1(résolution)

a,b,c étant des réels tels que $a\neq0$, on considère l'équation (E) $ax^2+bx+c=0$ et le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- **Si $\Delta>0$** (E) admet deux solutions distinctes ds |R :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- **Si $\Delta=0$** (E) admet une seule solution ds |R : $x_0 = -\frac{b}{2a}$

- **Si $\Delta<0$ (E) n'admet pas de solutions dans |R**.

Exemples : Résoudre dans |R

$3x^2 + 2x - 1 = 0$

$\Delta = (2)^2 - 4\times3\times(-1) = 4+12 = 16$ S={-1 ; 1/3 }

$x_1 = \frac{-2+4}{6} = \frac{1}{3}$

$x_2 = \frac{-2-4}{6} = -1$

$16x^2 + 8x + 1 = 0$

$\Delta = 0$

$x_0 = -¼$

S={-1/4}

$-x^2 + x - 1 = 0$

$\Delta = -3$

Pas de solution dans R

S=∅

Cas particulier : Lorsque le trinôme est incomplet on peut résoudre l'équation sans utiliser Δ.

a) (b = 0) $4x^2 - 1 = 0$

$x^2 = ¼$

$x = -½$ ou $x = ½$

S={- ½ ; ½ }

b) $x^2 + 2 = 0$

$x^2 = -2$ or pour tout réel x

$x^2 \geq 0$ donc

S=∅

c) (c = 0) $2x^2 + x = 0$.

On factorise par x d'où

$x(2x+1) = 0$

S={- ½ ; 0 }

Remarque 1: Ne jamais perdre de vue que c'est la variable x que l'on cherche et que dans le discriminant la variable x n'apparaît pas !

Remarque 2 : Pour aller plus vite

Regardons l'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$. Si on remplace x par 1 on obtient 1 + 2 – 3 = 0 ce qui montre que 1 est solution de l'équation. On dit que 1 est solution évidente , l'autre solution est alors donnée par le quotient c/a c'est – à dire ici –3/1 = -3.

Sans calculer de discriminant on a donc obtenu les deux solutions.

On a :

Si a + b + c = 0	Si a - b + c = 0
1 solution évidente et $\frac{c}{a}$ est l'autre solution	-1 solution évidente et $-\frac{c}{a}$ est l'autre solution

Exercice 3:Résoudre dans |R les équations suivantes

a) $x^2 + x - 6 = 0$

$\Delta = (1)^2 - 4\times1\times(-6) = 1+24 = 25$

$x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$ $x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$

S = { -3 ; 2 }

b) $x^2 - 5x + 4 = 0$

1 – 5 + 4 = 0 donc 1 solution évidente et 4 est l'autre solution

S = { 1 ; 4 }

C)$3x^2 + x - 1 = 0$

$\Delta = 13$

S = { $(-1 - \sqrt{13}) / 6$; $(-1 + \sqrt{13})/6$ }

e) $x^2 + 2x - 1 = 0$

$\Delta = 8$

S = { $-1 - \sqrt{2}$; $-1 + \sqrt{2}$ }

g) $3x^2 + 2x = 0$

$x(3x + 2) = 0$

S = { -2/3; 0}

i) $5x^2 + 2 = 0$

S =Ø

k) $\frac{1}{2} x^2 - 5x - 7 = 0$

$\Delta = 165$

S = { $5 - \sqrt{165}$; $5 + \sqrt{165}$}

c) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

$\Delta = 0$

S = { -1/3}

f) $x^2 + x + 1 = 0$

$\Delta = -3$

S = Ø

h) $3x^2 - 1 = 0$

S = { $-1/\sqrt{3}$;$1/\sqrt{3}$}

j) $15x^2 + 10x - 5 = 0$

-1 solution évidente , l'autre solution est 5/15 càd 1/3
S = { -1 ; 1/3}

l) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ (*)

équivaut à résoudre le système $\begin{cases} X = x^2 \\ X^2 - 3X + 2 \text{ (E)} \end{cases}$

(il s'agit d'une équation bicarrée on effectue un changement de variable pour la résoudre)
1 racine évidente de (E)   donc le système équivaut à

X = 1 ou X = 2 puisque l'autre solution est 2
Soit $x^2 = 1$ ou $x^2 = 2$
D'où S = { $-\sqrt{2}$; -1 ; 1 ; $\sqrt{2}$}

<u>Théorème 1 bis (factorisation)</u> f(x) = ax^2 + bx +c avec a ≠ 0 et avec les notations du théorème 1.

- Si $\Delta>0$:$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
- Si $\Delta= 0$:$f(x) = a(x - x_o)$
- Si $\Delta< 0$: f(x) n'est pas factorisable dans |R en produit de facteurs du premier degré.

<u>Remarques :</u> 1) On appelle racines du trinôme toute solution de l'équation (E).Si $\Delta= 0$ on dit racine double.
2) Savoir programmer sa calculatrice.

<u>Exemples</u> : Donner lorsque c'est possible une factorisation des trinômes suivants
1) $f(x)=x^2 - 3x + 2$ 2) $g(x)= 5x^2 + 8x + 3$ 3) $h(x)= 9x^2 + 6x + 1$ 4) $p(x)= x^2 - 2x + 3$

$f(x)=x^2 - 3x + 2$	$g(x)= 5x^2 + 8x + 3$	$h(x)= 9x^2 + 6x + 1$	$p(x)= x^2 - 2x + 3$
$\Delta= (-3)^2 - 4\times1\times(2)=9-8=1$ $x_1= 1$ $x_2 = 2$ $f(x)=(x - 1)(x - 2)$	$\Delta= 4$ $x_1= -1$ $x_2 = -3/5$ $g(x)=5(x+3/5)(x+1)=(5x + 3)(x+1)$	$\Delta= 0$ $x_0= - 1/3$ $h(x)=9(x+1/3)^2$	$\Delta= -8$ p(x) n'est pas factorisable dans |R en produit de facteurs du premier degré.

II) Signe du trinôme. Inéquations du second degré

1°) Signe du trinôme

Théorème 2

$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de f.

- **Si $\Delta>0$**

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de f(x)		sg(a)	0	sg(-a)	0	sg(a)	

(en supposant par exemple ici que $x_1 < x_2$ sinon on aurait x_2 avant x_1 dans le tableau)

- Si $\Delta = 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
f(x)		sg(a)	0	sg(a)	

- Si $\Delta < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
f(x)		sg(a)	

Remarque : en clair si $\Delta>0$: … **et si a positif** (rappel : **a** est **le nombre « qui est devant x^2 »**) alors

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de f(x)		+	0	—	0	+	

…Et si a négatif

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de f(x)		—	0	+	0	—	

Exemples :

$f(x)= x^2 + 2x - 3$	$g(x)= 4x^2 + 4x + 1$	$h(x)= -x^2 + 5x + 6$	$I(x)= -2x^2 + 5x + 8$
a = 1 donc c'est le cas où a positif $\Delta = 16$ $x_1 = -3$ $x_2 = 1$ ici – 3 < 1 donc	a = 4 donc c'est le cas où a positif $\Delta = 0$ $x_0 = -\frac{1}{2}$	a = -1 donc c'est le cas où a négatif $\Delta = 49$ $x_1 = 6$ $x_2 = -1$ ici – 1 < 6 donc	a = -2 donc c'est le cas où a négatif $\Delta = -39$
x : $-\infty$ -3 1 $+\infty$ f(x) : + 0 - 0 +	x : $-\infty$ $-\frac{1}{2}$ $+\infty$ f(x) : + 0 +	x : $-\infty$ -1 6 $+\infty$ f(x) : - 0 + 0 -	x : $-\infty$ $+\infty$ f(x) : -

2°) Résolution d'inéquations.

a) Méthode : étape 1 : on étudie le signe du trinôme donné dans un tableau d'après le théorème sur le signe du trinôme

étape 2 : En lisant le tableau on peut alors résoudre l'inéquation.

b)Exemples :

Résoudre dans |R les inéquations suivantes :

$x^2 + 2x - 3 \geq 0$	$4x^2 + 4x + 1 > 0$	$-x^2 + 5x + 6 > 0$	$-2x^2 + 5x + 8 \geq 0$
On effectue l'étude ci – dessus Et on a S =] $-\infty$;-3] U[1;$+\infty$[	On effectue l'étude ci – dessus Et on a S =R\{0}=R* .	On effectue l'étude ci – dessus Et on a S =]-1 ;6[	On effectue l'étude ci – dessus Et on a S =Ø

III)Représentation graphique et interprétation.

Dans la suite le plan est rapporté à un repère (O, i , j).

1°) Représentation graphique du trinôme.

Propriété et Définition

La représentation graphique du trinôme du second degré f est ***une parabole***

de ***sommet*** le point S($-\frac{b}{2a}$; $-\frac{\Delta}{4a}$) et ***d'axe de symétrie*** la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$

REMARQUES

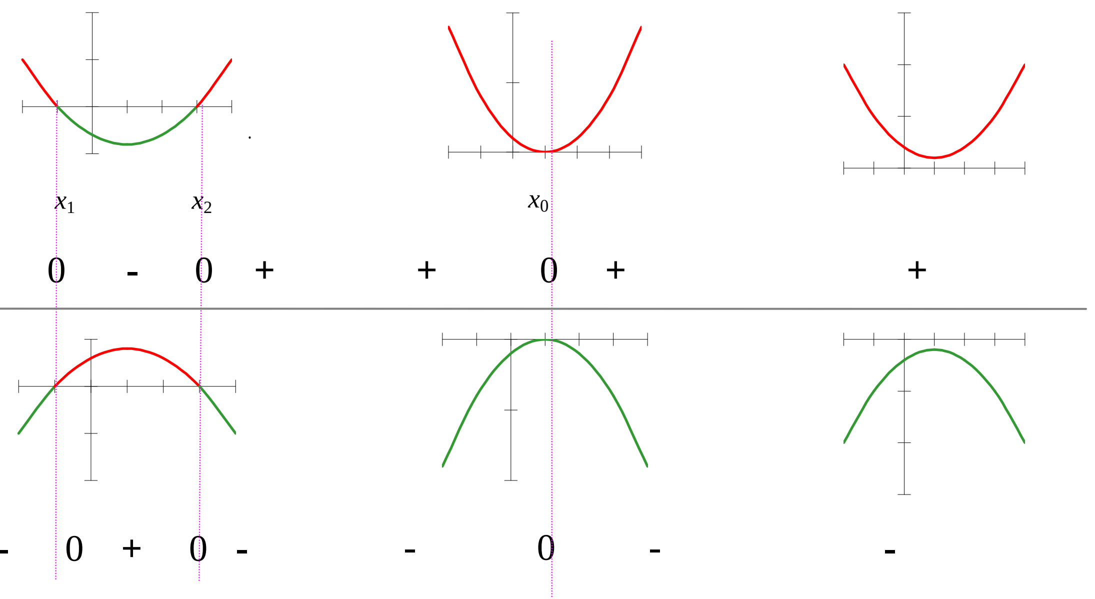
1°) **Si Δ>0 , P coupe l'axe (O,i) aux points d'abscisses x_1 et x_2 qui sont les racines du trinôme.**

2°) Le point **C(0,c)** est le **point d'intersection de P avec l'axe (O,j).**

2°) Interprétation graphique

On suppose ici que $x_1 < x_2$ si $\Delta > 0$

	Δ >0	Δ = 0	Δ< 0



	Δ >0	Δ = 0	Δ< 0
COURBE avec a > 0 « courbe à l'endroit »			
SIGNE	+ 0 - 0 +	+ 0 +	+
COURBE avec a < 0 « courbe à l'envers »			
SIGNE	- 0 + 0 -	- 0 -	-

POLYNOMES.

1°) Exemples

$P(x)=3x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ est un polynôme de degré 4.
$G(x)= - 4x^2 + x + 1$ est un polynôme de degré 2.
$H(x)= 2x^3$ est un monôme de degré 3.

2°) Factorisation par (x - a) avec a réel.

Définition On appelle racine (ou zéro) d'un polynôme P tout réel a vérifiant P(a)=0.

Exemples : a) $P(x)= x^3 + 4x^2 + 5x +2$ .Montrer que -2 est une racine de P.
b) Les racines de $G(x)=5(x - 1)(2x + 3)(x + 4)$ sont

Remarque : On note d°P ,le degré d'un polynôme P.

Définition2

On dit qu'un polynôme P est factorisable (ou divisible) par (x - a) s'il existe un

polynôme Q tel que $P(x) = (x – a).Q(x)$. De plus d°P = d°Q + 1.

Exemple : $P(x)= (x - 2)(x^2 + x + 1)$ est factorisable par (x - 2) et $Q(x)= x^2 + x + 1$.

Théorème

P est factorisable par (x – a) si et seulement si P(a) = 0 (c'est – à – dire a est une racine de P) .

Exemple 1 : Montrer que P est factorisable par (x +1) sachant que $P(x)= x^3 + x^2 + x + 1$.
On calcule P(- 1) (en effet attention (x + 1) =(x – (-1)) et on obtient P(-1)= 0 d'où le résultat.
Exemple 2 :
1)Montrer que le polynôme P défini par $P(x)= 3x^3 + 2x^2 - x - 4$ est factorisable par (x - 1)
2)Déterminer alors le polynôme $Q(x)=ax^2 + bx + c$ tel que $P(x)=(x - 1)Q(x)$.
Corrigé :
1)$P(1) = 3(1)^3 + 2(1)^2 – 1 – 4 = 3 + 2 –1 – 4 = 0$ d'où le résultat.
2) Méthode : on écrit $P(x) = (x – 1) (ax^2 + bx +c)$ et on développe , on obtient :
$P (x) = ax^3 + (b –a)x^2 + (c – b) x – c$ en « rassemblant » les termes correspondant à la même puissance de x .
Puis on procède par identification (on utilise en fait la propriété fondamentale qui dit qu'un polynôme est nul ssi tous ses coefficients sont nuls)
En effet on sait que $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - x – 4$
Et on vient aussi d'écrire que $P(x) = ax^3 + (b –a)x^2 + (c – b) x – c$

Donc $\begin{cases} a = 3 \\ b - a = 2 \\ c - b = -1 \\ -c = -4 \Leftarrow \end{cases}$ cette ligne est une « ligne de vérification » car grâce à elle on sait si les calculs faits sur les autres lignes sont justes.

On trouve $\begin{cases} a= 3 \\ b = 5 \\ c = 4 \end{cases}$ On a finalement $P (x) = (x – 1) (3x^2 + 5x + 4)$