EXAMEN BLANC DE MATHEMATIQUES RATTRAPAGE 250322

EXERCICE 1 (2 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte 0, 5 point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse ne rapportent, ni n'enlèvent aucun point. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1-

x	$-\infty$		5		$+\infty$
Variation de f	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

D'après ce tableau de variation :

a. f ' est positive sur R

b. f ' est négative sur R

c. f ' est négative sur] 5 ; $+\infty$[

d. f ' est négative sur $]-\infty; 5]$

2- On donne le tableau de variations d'une fonction f définie sur [-2 ; 5]

x	-2		-1		3		5
f(x)	0,1	↘	-0,05	↗	1	↘	-6

L'équation f(x) = 0 admet dans l'intervalle $[-2; 5]$:

a. exactement 1 solution

b. exactement 2 solutions

c. exactement 3 solutions

d. pas de solutions

3- On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\frac{3n^2-2}{n+1} \leq u_n \leq \frac{3n^2+5}{n}$$

On peut affirmer que la suite (u_n) :

a) converge vers 3

b) diverge vers $+\infty$

c) converge vers 0

d) On n'a pas assez d'informations pour se prononcer sur la convergence de (u_n).

4- Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = e^{ax+1}$ où a est un réel .
On peut alors affirmer que $f'(x) =$

a) e^{ax+1}

b) ae^{ax+1}

c) axe^{ax+1}

d) $(ax+1)e^{ax+1}$

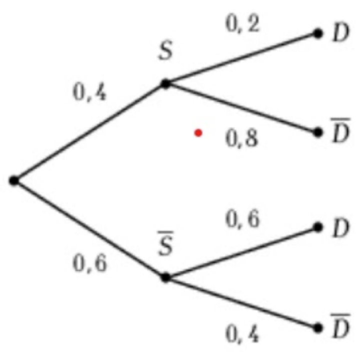
EXERCICE 2 (5 points)

Les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

Partie A

Farah part sur la côte un week-end. Durant son séjour, il lui est possible de partir faire une excursion avec un guide sur un bateau.
La probabilité qu'elle choisisse d'y participer le samedi est de 0,4.
• Si elle n'est pas partie faire l'excursion le samedi, la probabilité qu'elle le fasse le dimanche est de 0,6.
• Si elle a participé à l'excursion le samedi, la probabilité qu'elle le fasse le dimanche est de 0,2. On considère les événements suivants :
• S : « Farah part en excursion le samedi »
• D : « Farah part en excursion le dimanche »

1. L'arbre de probabilités représentant la situation est le suivant:



2. Déterminer la probabilité que Farah parte deux jours de suite en excursion.

Il faut calculer p(S ∩ D)
p(S ∩ D)= p(S) × P_S (D)
= 0, 4 × 0, 2
= 0, 08
Donc p(S ∩ D)= 0, 035

3. Déterminer $P(D)$.
S et $\bar{S}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales.

P(D) = p(S ∩ D) + p($\bar{S}$ ∩ D)
= p(S ∩ D) + p($\bar{S}$) × $P_{\bar{S}}$ (D)
= 0, 08 + 0, 6 × 0, 6
= 0, 08 + 0, 036
= 0, 44

4. On suppose que Farah n'est pas partie en excursion le dimanche.
Déterminer la probabilité qu'elle soit partie en excursion le samedi .
On cherche à déterminer $P_{\bar{D}}$ (S)
$P_{\bar{D}}$ (S) = $\frac{P(\bar{D} \cap S)}{P(\bar{D})}$ = $\frac{P(S \cap \bar{D})}{P(\bar{D})}$ = $\frac{P(S) \times P_{\bar{D}}(S)}{1-P(D)}$ = $\frac{0{,}4 \times 0{,}8}{1-0{,}44}$ ≈0.571

Partie B

Le guide touristique dispose de dix places sur son bateau. Il a constaté que régulièrement, une personne ayant acheté un billet ne se présente pas pour prendre le bateau. On suppose que le comportement de chaque touriste est indépendant les uns des autres, et que chacun a une probabilité de 0,95 de se présenter pour l'excursion.
On note X le nombre de touristes qui se présentent pour prendre le bateau.

1.Donner la loi suivie par X et en donner ses paramètres.

On a une succession de 10 épreuves indépendantes et identiques (« on suppose que le comportement de chaque touriste est indépendant les uns des autres ») avec deux issues possibles, un succès (« le touriste se présente ») , de probabilité p= 0,95 ou un échec (« le touriste ne se présente pas »), de probabilité 1-p=0,05 . On a donc la répétition 10 fois d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p=0,95, c'est un schéma de Bernoulli de paramètres n=10 et p=0,95.
On en déduit que X, la variable aléatoire associée à ce schéma de Bernoulli qui donne le nombre de succès, à savoir le nombre de touristes qui se présentent, suit une loi binomiale B(10 ; 0,95) .

2.Déterminer la probabilité qu'exactement 8 touristes se présentent à l'excursion.

P(X = 8) = $\binom{10}{8}0,95^8 0,05^2 \approx$ 0.075

3.Déterminer la probabilité pour qu'au moins huit touristes se présentent à l'excursion.

P(X $\geq$ 8) $\approx$ 0.988

EXERCICE 3 (5 points)

La médiathèque d'une petite ville rurale a ouvert ses portes le 2 janvier 2020 et a enregistré 120 inscriptions cette année – là. Comme c'est la seule médiathèque dans un rayon de 50 km, des habitants de villages environnants peuvent aussi s'inscrire. Les responsables estiment que chaque année, il y a 53 nouveaux inscrits mais que 20% des adhérents ne renouvelleront pas leur inscription.
Les responsables souhaitent étudier l'évolution du nombre d'adhérents. Pour cela ils modélisent le nombre d'inscrits à la médiathèque chaque année par une suite (u_n), où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre d'adhérents à la médiathèque l'année 2020 + n .

Ainsi $u_0 = 120$.

1. En 2021 20% des adhérents ne renouvellent pas leur inscription et il y a 53 nouveaux inscrits donc

$$u_1 = \left(1 - \frac{20}{100}\right) u_0 + 53 = 0{,}8.120 + 53 = 149$$

2. L'année 2020 + n, 20% des adhérents ne renouvellent pas leur inscription et il y a 53 nouveaux inscrits donc

$$u_{n+1} = \left(1 - \frac{20}{100}\right) u_n + 53 \quad \text{soit } u_{n+1} = 0{,}8\, u_n + 53$$

3.La propriété à démontrer est $P_n : 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 265$

Initialisation : pour n=0 on a $u_0 = 120$ et $u_1 = 149$,or $0 \leq 120 \leq 149 \leq 265$ donc
$0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 265$ et P_0 est vraie

Hérédité : On suppose que la propriété est vraie **pour un entier n** fixé c'est-à-dire $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 265$

Notre objectif est de montrer qu'elle reste vraie au rang n+1 c'est-à-dire que $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 265$

Par hypothèse de récurrence on a $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 265$
donc , comme 0,8 >0

$$0 \leq 0{,}8u_n \leq 0{,}8u_{n+1} \leq 212$$

soit encore

$$53 \leq 0{,}8u_n + 53 \leq 0{,}8u_{n+1} + 53 \leq 212 + 53$$

Soit finalement $$0 \leq 0{,}8u_n + 53 \leq 0{,}8u_{n+1} + 53 \leq 265$$

et la propriété est vraie au rang n+1.

Conclusion : P_n est vraie au rang 0, elle est héréditaire, on a donc démontré par récurrence que
pour tout entier n ,

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 265$$

4. La suite (u_n) est-elle convergente? Justifier votre réponse.

   Comme $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout entier n de N alors (u_n) est croissante.
   De plus $u_n \leq 265$ pour tout n de N donc elle est majorée.
   Ainsi d'après le théorème de convergence des suites monotones (u_n) est convergente.

5. Pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 265$ donc

$v_{n+1} = u_{n+1} - 265 = 0,8\, u_n + 53 - 265 = 0,8\, u_n - 212$

$v_{n+1} = 0,8(\, u_n - \frac{212}{0,8}\,)$

$v_{n+1} = 0,8(\, u_n - 265)$

$v_{n+1} = 0,8\, v_n$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = u_0 - 265 = -145$

6.

On en déduit que pour tout entier naturel n,

$v_n = -145(\,0,8\,)^n$

Donc , comme $u_n = v_n + 265$

$u_n = -145(0,8)^n + 265$

7. $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^n = 0$ car $-1 < 0,8 < 1$ donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} -145(0,8)^n = 0$ puis par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 265$.

Le nombre d'adhérents augmentera régulièrement chaque année jusqu'à se stabiliser à 265 personnes.

8.La ville, qui avait prévu initialement un aménagement de la médiathèque pour un nombre maximum de 250 adhérents. Afin de mieux adapter les locaux de la médiathèque à la fréquentation journalière future, le responsable de la ville souhaite prévoir à partir de quelle date il devra prévoir une transformation des locaux. Pour résoudre ce problème on décide d'utiliser le programme écrit en Python ci-dessous.

Dans ce programme, la variable n désigne le nombre d'années écoulées depuis 2020, et la variable u calcule le nombre d'adhérents de la médiathèque par année.

a.

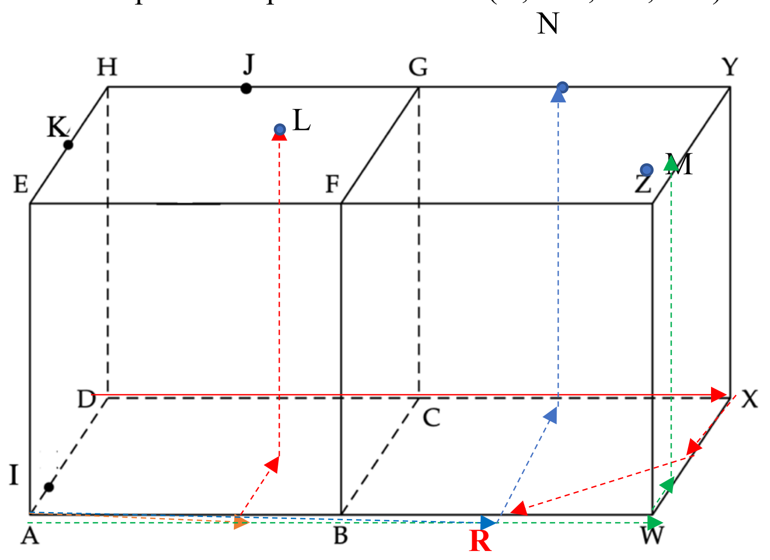
```
def v( ):
    n=0
    u= 120
   while  u <= 250 :
     n = n+1
     u = 0.8*u+53
   return n
```

b. n = 11

c. 2031

EXERCICE 3 (4 points)

On considère deux cubes identiques d'arête de longueur 1, ABCDEFGH et BWXCFZYG , qui ont la face BCGF en commun , comme l'illustre la figure ci-dessous.
On note K le milieu du segment [EF], J le milieu du segment [HG] et I le point du segment [AD] tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\ \overrightarrow{AD}$.
On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



Partie A

1. Placer sur la figure jointe en annexe les points $L(\frac{3}{4} ; \frac{1}{2} ; 1)$, $M(2, \frac{1}{4}, 1)$ et $N(\frac{3}{2} ; 1 ; 1)$

2. Construire le point R tel que : $\overrightarrow{DR} = 2\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{JK}$

Partie B

1. On a : B(1 ; 0 ;0) E(0 ; 0 ;1) K(0; $\frac{1}{2}$; 1) H(0 ; 1 ;1) I(0; $\frac{1}{4}$; 0) et J ($\frac{1}{2}$; 1; 1)

2. a. $\overrightarrow{LE}\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{LN}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

b. $\overrightarrow{LE} = -\overrightarrow{LN}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{LE}$ et $\overrightarrow{LN}$ sont colinéaires on en déduit que les points E, L et N sont alignés.

3. Un vecteur directeur de (JK) est $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, de plus J ($\frac{1}{2}$; 1 ; 1) donc

Une représentation paramétrique de (JK) est :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ y = 1 - \frac{1}{2}t \\ z = 1 \end{cases}, \quad t \text{ dans } \mathbb{R}$$

4. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (NE) est $\begin{cases} x = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}k \\ y = 1 - k \\ z = 1 \end{cases}$, k $\in R$

Montrer que les droites (JK) et (NE) sont sécantes en un point Q dont on déterminera les coordonnées.

Un vecteur directeur de (JK) est $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

et un vecteur directeur de (NE) est $\overrightarrow{NE}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\frac{x_{\overrightarrow{JK}}}{x_{\overrightarrow{NE}}} = \frac{1}{3}$ et $\frac{y_{\overrightarrow{JK}}}{y_{\overrightarrow{NE}}} = \frac{1}{2}$ donc $\frac{x_{\overrightarrow{JK}}}{x_{\overrightarrow{NE}}} \neq \frac{y_{\overrightarrow{JK}}}{y_{\overrightarrow{NE}}}$

Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{NE}$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles donc les droites ne sont pas parallèles. Elles sont donc soit sécantes soit non coplanaires.

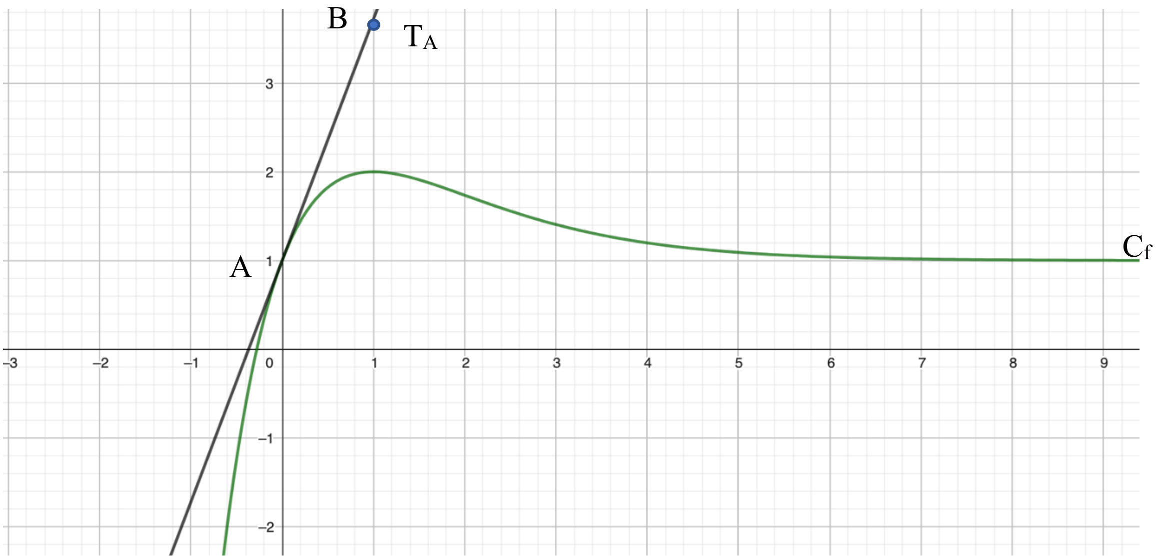
Un point M(x ; y ; z) appartient à (JK) ∩ (NE) si et seulement si ses coordonnées vérifient le système suivant :

$\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}k \\ 1 - \frac{1}{2}t = 1 - k \\ 1 = 1 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}k \\ t = 2k \\ 1 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} -1 = -\frac{1}{2}k \\ t = 2k \\ 1 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} k = 2 \\ t = 4 \\ 1 = 1 \end{cases}$

On en déduit que les deux droites sont sécantes en M($-\frac{3}{2}$; -1 ; 1)

EXERCICE 5 (5 points)

On considere la fonction f definie et dérivable sur R dont la courbe representative C_f est tracée ci-dessous à l'aide d'un logiciel. A désigne le point de la courbe C_f d'abscisse 0 et T_A désigne la tangente à la courbe C_f au point A. La tangente T_A passe par le point B(1 ; 1 + e).



Partie A

1. Il semble que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$
2. $f(0) = 1$
3. $f'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1+e-1}{1-0} = e$
4. L'équation réduite de la tangente à la courbe C_f au point A est :

$y = f'(0)\,x + f(0)$
$y = e\,x + 1$

Partie B

Pour la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est definie sur R par

$$f(x) = 1 + xe^{-x+1}$$

1. Calculer la limite de la fonction f en $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} -x + 1 = +\infty$

et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ donc par composition des limites $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x+1} = +\infty$

Or $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ **donc par produit des limites puis par somme des limites**

$$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

2. Pour tout reel x, $1 + e\left(\frac{x}{e^x}\right) = 1 + e\,xe^{-x} = 1 + x\,e \times e^{-x} = 1 + x\,e^{-x+1} = f(x)$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}}$ **= 0 puisque par croissance comparée** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Donc par produit des limites puis par somme des limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

4. La fonction f qui est le produit d'une fonction affine et d'une fonction exponentielle est donc dérivable sur R :

$u(x) = x$ $\quad$ $u'(x) = 1$

$v(x) = e^{-x+1}$ $\quad$ $v'(x) = -e^{-x+1}$

Comme (uv)' = u'v + uv' on a pour tout réel x

$$f'(x) = e^{-x+1} - xe^{-x+1} = (1 - x)e^{-x+1}$$

6. Etudier les variations de la fonction f sur R et construire son tableau de variations.

Comme $e^{-x+1} > 0$ pour tout réel x alors $f'(x)$ est du signe de (1 -x) sur R qui est une fonction affine de coefficient a = -1 soit de coefficient négatif. On en déduit le tableau de variation de *f* sur R :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f '(x)		+	0	-	
f(x)	$-\infty$	↗	2	↘	1

6. Demontrer que l'equation $f(x) = 0{,}21$ admet une unique solution α sur R.

D'après le tableau de variation sur [1 ; $+\infty$ [, $f(x) > 1$ donc l'équation $f(x) = 0{,}21$ n'admet pas de solution sur [1 ; $+\infty$ [.

La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle]$-\infty$; 1] à valeurs dans l'intervalle]$-\infty$; 2] qui contient 0, 21 donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires relatif aux fonctions strictement monotones l'équation $f(x) = 0.21$ admet une unique solution α dans]$-\infty$; 1]

On en déduit donc que l'equation $f(x) = 0{,}21$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

7. Comme d'après la calculatrice $f(-0.24) \approx 0{,}171$ et que $f(-0.23) = 0{,}213$ alors
$f(-0.24) < f(\alpha) < f(-0.23)$, on en déduit $-0.24 < \alpha < -0.23$