Spécialité Mathématiques
Bac Blanc — 26 Janvier 2023

Correction

1 QCM — 2 points

Note : Bien qu'aucune explication n'était demandée, on justifie ici les réponses attendues.

1. On considère une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée.
On donne ci-dessous le tableau de variation de f sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Variations f	$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$

D'après ce tableau de variation :

- **a.** f' est positive sur $\mathbb{R}$
- **b.** f' est négative sur $\mathbb{R}$
- **c.** **f' est positive sur $]-\infty;-1]$**
- **d.** f' est positive sur $]-1;+\infty$

La réponse correcte est la **c** d'après le théorème vu en classe de première établissant le lien entre le signe de f' et les variations de f.

2. On donne le tableau de variation d'une fonction f definie sur l'intervalle $[-1;3]$:

x	-1	1	2	3
Variations f	-2 ↗	2 ↘	-1 ↗	-0.5

L'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-1;3]$:

- **a.** exactement 3 solutions
- **b.** **exactement 2 solutions**
- **c.** exactement 1 solutions
- **d.** pas de solutions

La réponse correcte est la **b**.
En effet, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires s'applique aux intervalles $[-1;1]$ et $[1;2]$ mais pas à l'intervalle $[2;3]$ car $0 > -0.5$.

3. On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\boldsymbol{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant u_n \leqslant 2-\frac{n+1}{n}}$$

On peut affirmer que la suite (u_n) :

- **a.** converge vers 2
- **b.** **converge vers 1**
- **c.** diverge vers $+\infty$
- **d.** on n'a pas assez d'informations pour se prononcer sur la convergence de (u_n).

La réponse correcte est la **b**.
En effet les suites de gauche et de droite de l'inégalité tendent toutes les deux vers 1 et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ d'après le théorème des gendarmes.

4. Pour tout réel a, le nombre réel $\mathrm{e}^{\frac{a}{2}}$ est égal à :

- **a.** $\sqrt{\mathrm{e}^a}$
- **b.** $\dfrac{\mathrm{e}^a}{2}$
- **c.** $\dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^2}$
- **d.** $\mathrm{e}^{\sqrt{a}}$

La réponse correcte est la **a**.

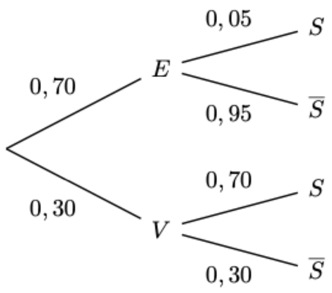
- En effet d'une part $\left(\mathrm{e}^{\frac{a}{2}}\right)^2 = \mathrm{e}^{2\times\frac{a}{2}} = \mathrm{e}^a$.
- D'autre part une exponentielle est toujours positive, donc pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\quad \mathrm{e}^{\frac{a}{2}} > 0$
- Donc on en déduit que $\mathrm{e}^{\frac{a}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}^a}$

2 Probabilités — 5 points

Partie A

On s'intéresse à l'achat d'un vélo quelconque dans ce magasin.

1. **Recopier et compléter l'arbre de probabilités suivant représentant la situation :**



2. **Quelle est la probabilité qu'un client achète un vélo électrique et soit sportif ?**

Il faut calculer $p(E \cap S)$.

$p(E \cap S) = p(E) \times p_E(S)$
$= 0,70 \times 0,05$
$= 0,035$

Donc $\boxed{\boldsymbol{p(E \cap S) = 0,035}}$

3. **Démontrer que $P(S) = 0,245$.**

D'après la formule des probabilités totales,

$P(S) = p(S \cap E) + p(S \cap V)$
$= p(E \cap S) + p(V) \times p_V(S)$
$= 0,035 + 0,30 \times 0,70$
$= 0,035 + 0,21$
$= 0,245$

Donc $\boxed{\boldsymbol{p(S) = 0,245}}$

4. **On suppose que le client n'est pas sportif. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté un vélo électrique ? On arrondira le résultat à 10^{-3} près.**

On cherche à déterminer $p_{\overline{S}}(E)$

$$p_{\overline{S}}(E) = \frac{p(\overline{S} \cap E)}{p(\overline{S})} = \frac{p(E \cap \overline{S})}{1 - p(S)} = \frac{p(E) \times p_E(\overline{S})}{1 - p(S)} = \frac{0,70 \times 0,95}{1 - 0,245} \approx 0,880794$$

donc $\boxed{\boldsymbol{p_{\overline{S}}(E) = \frac{0,665}{0,755} \approx 0,881}}$ à 10^{-3} près

Partie B

On considère la variable aléatoire X qui donne le nombre de vélos électriques premier prix ayant un défaut parmi les 30 prélevés.

1. **Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.**

Pour chaque vélo éléctrique premier prix du stock reçu, la probabilité qu'il ait un défaut est de de 1,2% soit 0,012.

Puisque le lot de 30 vélos électriques premier prix prélevés est assimilé à un tirage successif avec remise, compter le nombre de velos défectueux du lot revient à compter le nombre de succès lors d'une répétition de 30 épreuves de Bernoulli identiques et de même probabilité.

La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètres $\boldsymbol{n = 30}$ et $\boldsymbol{p = 0,012}$ c'est-à-dire la loi $\boxed{\boldsymbol{\mathcal{B}(30\,;\,0,012)}}$.

2. **Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux vélos prélevés de l'échantillon aient un défaut. On arrondira le résultat à 10^{-3} près.**

$$\boldsymbol{p(X = 2) = \binom{30}{2} \times 0,012^2 \times (1 - 0,012)^{28} \approx 0,044673}$$

Donc $\boxed{\boldsymbol{p(X = 2) \approx 0,045}}$ au millième près.

Dit autrement : Il y a un peu plus de 4 chances sur 100 pour qu' exactement deux vélos électriques premier prix prix parmi le lot de 30 aient un défaut.

3. **Déterminer la probabilité pour que au moins l'un des vélos électriques prélevé de cet échantillon présente un défaut. On arrondira le résultat à 10^{-3} près.**

On cherche à déterminer $P(X \geqslant 1)$.

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)$
$= 1 - \binom{30}{0} \times 0,012^0 \times (1 - 0,012)^{30}$
$= 1 - 1 \times 1 \times 0,988^{30}$
$= 1 - 0,988^{30}$
$\approx 0,303841$

donc $\boxed{\boldsymbol{p(X \geqslant 1) \approx 0,304}}$ à 10^{-3} près.

Dit autrement : Il y a un peu plus de 30 chances sur 100 pour qu'au moins l'un des vélos du lot ait un défaut. Cette probabilité n'est pas négligeable !

On modélise le nombre de voitures louées chaque mois par une suite (u_n), où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre de voitures louées le n-ième mois après le mois de janvier 2021. Ainsi $\boldsymbol{u_0 = 280}$.

1. **Déterminer u_1, c'est-à-dire le nombre de voitures qui ont été louées avec ce système de location au cours du mois de février 2021.**

   Au cours du mois de février , 10 % des contrats du mois de janvier ont été arrêtés.
   Il en reste donc $0,9 \times 280 = 252$.
   De plus 42 nouveaux contrats sont signés donc il y a en février $252 + 42 = 294$ voitures louées.

2. **Justifier que la suite (u_n) vérifie, pour tout entier naturel n, la relation suivante :**
$$\boldsymbol{u_{n+1} = 0,9u_n + 42}$$

   Si u_n est le nombre de voitures louées au bout de n mois apres janvier 2021, le $(n+1)^{\text{e}}$ mis, 10 % des contrats s'arrêteront; il en restera donc $0,9u_n$.
   D'autre part,42 nouveaux contrats sont signés donc $\boldsymbol{u_{n+1} = 0,9u_n + 42}$

3. **Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :**
$$\boldsymbol{0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 420}$$

   a. **Initialisation** : Pour $n = 0$,

   - On a d'une part $u_0 = 280$
   - Et d'autre part en février 2021 $u_1 = 294$.
   - Donc on a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 420$
   - La conjecture est donc vraie au rang 0.

   b. **Hérédité** : Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $\boldsymbol{0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 420}$.
   Montrons alors que $\boldsymbol{0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 420}$.

   - On a supposé que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on a $\boldsymbol{0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 420}$.
   - Alors en multipliant par 0,9 :
     $0,9 \times 0 \leqslant 0,9u_n \leqslant 0,9u_{n+1} \leqslant 0,9 \times 420$
     donc $\boldsymbol{0 \leqslant 0,9u_n \leqslant 0,9u_{n+1} \leqslant 378}$
   - Et en ajoutant 42 à chaque membre :
     $0 \leqslant 0,9u_n + 42 \leqslant 0,9u_{n+1} + 42 \leqslant 378 + 42$,
   - L'encadrement précédent signifie que $\boxed{\boldsymbol{0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 420}.}$
   - l'encadrement conjecuré est vrai au rang $(n+1)$, donc la propriété est héréditaire.

   c. **Conclusion** :

   - La propriété conjecturée est vraie au rang 0.
   - La propriété conjecturée est héréditaire.
   - Donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 0,\ \boldsymbol{0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 420}}$

4. **La suite (u_n) est-elle convergente? Justifier votre réponse.**

   - La première partie du résultat précédent montre que la suite (u_n) est croissante.
   - La deuxième partie du résultat précédent montre que cette suite est majorée par 420.
   - Donc d'après le théorème de convergence monotone, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge.}}$

5. Pour tout entier naturel n, on pose :
$$\boldsymbol{v_n = u_n - 420}$$

   a. **Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera le premier terme v_0 et la raison.**

   On cherche à montrer qu'il existe une constante q telle que, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = q \times v_n$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 420 \\ &= (0,9u_n + 42) - 420 \\ &= 0,9u_n - 378 \\ &= 0,9\left(u_n - \frac{378}{0,9}\right) \\ &= 0,9(u_n - 420) \\ &= 0,9(v_n) \end{aligned}$$

   On a donc montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 0,9v_n}$
   Cette égalité montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de $\boxed{\textbf{raison } q = 0,9}$ de premier terme $\boxed{\boldsymbol{v_0 = u_0 - 420 = 280 - 420 = -140}}$.

   b. **Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.**

   Puisque (v_n) est géométrique, de raison $q = 0,9$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, :
   $v_n = v_0 \times 0,9^n$, soit $\boldsymbol{v_n = -140 \times 0,9^n}$,

c. **Montrer que pour tout entier naturel n :**

$$\boldsymbol{u_n = -140 \times 0,9^n + 420}$$

- On a $v_n = -140 \times 0,9^n$,
- Or $v_n = u_n - 420$ donc $u_n = v_n + 420$
- Donc, quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\boldsymbol{u_n = -140 \times 0,9^n + 420}}$$

6. **Déterminer la limite de la suite (u_n) puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

- $-1 < 0,9 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$
- donc $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 420}$.

Ceci signifie que le nombres de véhicules loués selon ce modèle va converger vers 420 véhicules.

7. **La ville, qui possède initialement 380 véhicules, envisage d'acheter des véhicules supplémentaires pour répondre à la demande.**

a. **Recopier et compléter ce programme.**

```
def v():
    n=0
    u=280
    while u<=380:
        n=n+1
        u=0.9*u+42
    return n
```

b. **Quelle valeur contient la variable n à la fin de l'exécution de ce programme ?**

La valeur retournée est $\boldsymbol{n = 12}$.

c. **En déduire le mois durant lequel la ville devra augmenter son parc de véhicules si elle veut satisfaire la demande.**

C'est au bout du $\boxed{\text{douzième mois}}$ que le nombre de voiture sera devenu insuffisant, en $\boxed{\text{janvier 2022}}$.

Le parc de véhicules devra donc être agrandit $\boxed{\text{au plus tard fin décembre 2022.}}$

Remarque : quand on remplace la dernière ligne du programme par `return(n,u)` , on obtient **(12, 380.4598648926601).**

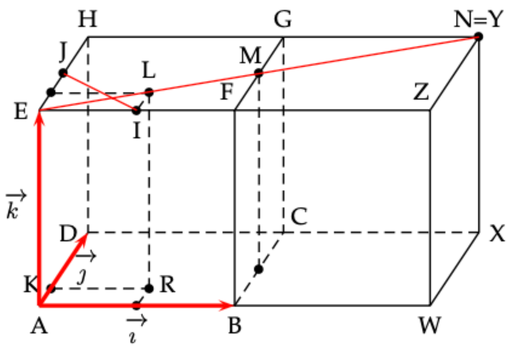
On constate effectivement $u_{12} > 380$.

4 Espace — 4 points

Partie A

1. Placer sur la figure jointe en annexe les points $L\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4};1\right)$, $M\left(1;\frac{1}{2};1\right)$, et $N(2;1;1)$.

2. Construire le point R tel que :
$\overrightarrow{AR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$



Partie B

1. **Lire les coordonnées des points B, E, K, H, I et J.**

On lit :

B(1 ;0 ;0) E(0 ;0 ;1) H(0 ;1 ;1) J(0 ; $\frac{1}{2}$;1) I($\frac{1}{2}$;0 ;1)

2. **a.** **Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EL}$ et $\overrightarrow{EN}$.**

- Le vecteur $\overrightarrow{EL}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_L - x_E \\ y_L - y_E \\ z_L - z_E \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EL}\begin{pmatrix} 1/2 - 0 \\ 1/4 - 0 \\ 1 - 1 \end{pmatrix}$

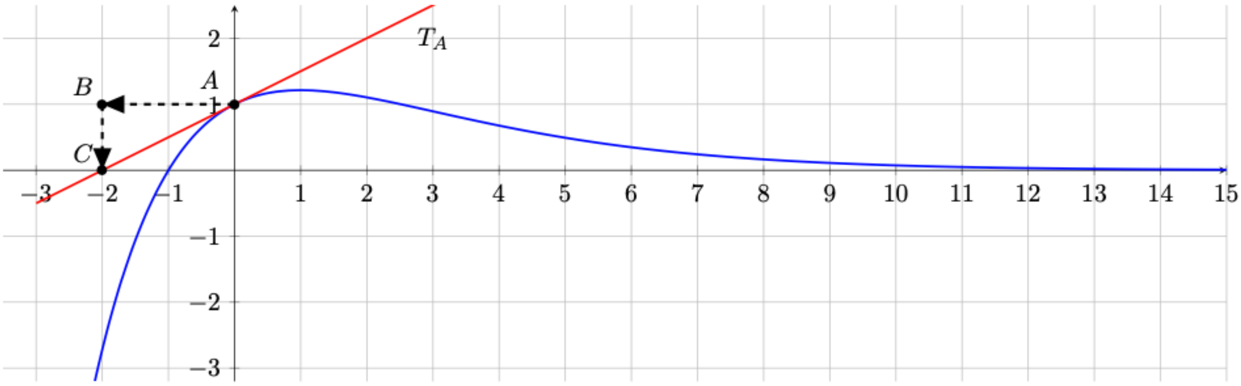
donc $\boxed{\overrightarrow{EL}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}}$

- Le vecteur $\overrightarrow{EN}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_N - x_E \\ y_N - y_E \\ z_N - z_E \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EN}\begin{pmatrix} 2 - 0 \\ 1 - 0 \\ 1 - 1 \end{pmatrix}$

donc $\boxed{\overrightarrow{EN}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

5 Exponentielle — 5 points

On considere la fonction f definie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe representative C_f est tracée ci-dessous à l'aide d'un logiciel. A désigne le point de la courbe C_f d'abscisse 0 et T_A désigne la tangente à la courbe C_f au point A .



Partie A

1. **Conjecturer la limite de $f(x)$ en $+\infty$.**
L'axe des abscisses semble être asymptote à C_f en $+\infty$. On peut donc conjecturer que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$

2. **Lire $f(0)$.**

On lit $\boxed{f(0) = 1}$.

3. **Déterminer graphiquement $f'(0)$**

En utilisant les points A, B et C on calcule :
$f'(0) = \dfrac{\texttt{Variation des y}}{\texttt{Variation des x}} = \dfrac{-1}{-2}$

Donc $\boxed{f'(0) = \dfrac{1}{2}}$.

4. **En déduire l'équation réduite de la tangente à la courbe C_f au point A.**

- La tangente à la courbe C_f au point A à pour équation
$T_A : y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$
- Donc $T_A : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

Donc $\boxed{T_A : y = \dfrac{1}{2}x + 1}$.

Partie B

Pour la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est definie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)e^{\frac{-1}{2}x}$$

1. **Calculer la limite de la fonction f en $-\infty$.**

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-1}{2}x\right) = +\infty$
- Or $\lim\limits_{X\to\infty}\left(e^X\right) = +\infty$
- Donc en posant $X = \dfrac{-1}{2}x$ par composition, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{-1}{2}x}\right) = +\infty$
- Or $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$
- Donc par produit,
$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)) = -\infty}$

2. **Justifier que pour tout reel x,**
$$f(x) = 2\left(\frac{\frac{1}{2}x}{e^{\frac{1}{2}x}}\right) + e^{\frac{-1}{2}x}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)e^{-\frac{1}{2}x} \\ &= xe^{-\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x} \\ &= \frac{x}{e^{\frac{1}{2}x}} + e^{-\frac{1}{2}x} \\ &= \frac{2\frac{1}{2}x}{e^{\frac{1}{2}x}} + e^{-\frac{1}{2}x} \\ &= 2\left(\frac{\frac{1}{2}x}{e^{\frac{1}{2}x}}\right) + e^{-\frac{1}{2}x} \end{aligned}$$

donc on a bien, $\boxed{f(x) = 2\left(\dfrac{\frac{1}{2}x}{e^{\frac{1}{2}x}}\right) + e^{-\frac{1}{2}x}}$

3. **En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.**

- Posons $X = \dfrac{1}{2}x$; On a $\lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty$.

- Or $\dfrac{\frac{1}{2}x}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}} = \dfrac{\mathrm{e}^X}{X}$.
- D'autre part,on sait d'après le cours que $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{\mathrm{e}^X} = 0$.
-
- On peut donc dire par composition que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{2}x}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}} = 0}$
- D'autre part, puisque $X = \dfrac{1}{2}x$, on a $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} = \mathrm{e}^{-X}$
- Or on a que $\lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty$ et on sait que $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^{-X} = 0$.
- On peut donc dire, par composition, que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} = 0}$.
- Finalement par somme, on obtient $$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$.

4. **Montrer que pour tout reel x,**
$$f'(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}(1-x)$$
On peut écrire :
$$f(x) = u(x)v(x) \quad \textbf{avec} \quad \begin{cases} u(x) = x+1 \\ v(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \end{cases}$$
Donc $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \end{cases}$

Ainsi f est le produit des fonctions u et v, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$. On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 1\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + (x+1)\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right) \end{aligned}$$
Donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}(1-x)}$

5. **Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et construire son tableau de variations.**
$$f'(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}(1-x)$$
- Or, pour tout x, $\dfrac{1}{2} > 0$
- Et pour tout x, $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} > 0$
- Donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$ qui s'annule et change de signe pour $x = 1$.
- On établit le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$	↘	0

Précision : $f(0) = 1$ et $f(1) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

6. **Demontrer que l'equation $f(x) = 0,11$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0;+\infty[$.**
- **Sur l'intervalle $[0;1]$,**
$f(x) \geqslant f(0) = 1 > 0,11$.
Donc l'equation $\boldsymbol{f(x) = 0,11}$ n'admet aucune solution sur $[0;1]$.
- **Sur l'intervalle $[1;+\infty[$,**
On peut appliquer le corollaire du TVI (thèorème des valeurs intermédiaires).
En effet on a :
  - f est continue sur $[1;+\infty[$
  - f est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$
  - **$0,11$ est entre $f(1)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$**
  car on a :
    - $\boldsymbol{f(1) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 1,21 > 0,11}$
    - $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 < 0,11.}$

  Donc l'equation $\boldsymbol{f(x) = 0,11}$ admet une solution unique sur $[1;+\infty[$.
- Finalement, on déduit de ce qui précède que l'equation $\boldsymbol{f(x) = 0,11}$ admet une unique solution notée α sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
- On peut illustrer le raisonnement précédent par le tableau de variations de f restreint à l'intervalle $0;+\infty[$ où l'on a placé le nombre $0,11$:

x	0		1		α		$+\infty$
$f(x)$	1	↗	$2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$	↘	$0,11$	↘	0

7. **Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.**
La calculatrice donne :
- $f(9,02) > 0,11$
- $f(9,03) < 0,11$
- Donc $\boxed{9.02 \leqslant \alpha \leqslant 9.03}$