Bac Blanc de Spécialité Mathématiques — 26 Janvier 2023

Tous les résultats ou affirmations doivent être soigneusement justifiés.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les smartphones et autres appareils électroniques sont interdits.
Seules les calculatrices de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.
L'ensemble de ce devoir est noté sur 21 points. La note finale sera ramenée à 20 points.
Ce sujet comporte 6 pages dont une annexe en page 7 L'annexe est à rendre avec la copie.

1 QCM — 2 points

- Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
- Aucune justification n'est demandée.
- Une bonne réponse rapporte $0,5$ point.
- Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse ne rapportent, ni n'enlèvent aucun point.
- Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1. On considère une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée.

On donne ci-dessous le tableau de variation de f sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Variations f	$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$

D'après ce tableau de variation :

a. f' est positive sur $\mathbb{R}$

b. f' est négative sur $\mathbb{R}$

c. f' est positive sur $]-\infty;-1]$

d. f' est positive sur $]-1;+\infty[$

2. On donne le tableau de variation d'une fonction f definie sur l'intervalle $[-1;3]$:

x	-1	1	2	3
Variations f	-2 ↗	2	↘ -1 ↗	-0.5

L'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-1;3]$:

a. exactement 3 solutions

b. exactement 2 solutions

c. exactement 1 solution

d. pas de solutions

3. On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n, on a :

$$1+\left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant u_n \leqslant 2-\frac{n+1}{n}$$

On peut affirmer que la suite (u_n) :

a) converge vers 2

b) converge vers 1

c) diverge vers $+\infty$

d) on n'a pas assez d'informations pour se prononcer sur la convergence de (u_n).

4. Pour tout réel a, le nombre réel $\mathrm{e}^{\frac{a}{2}}$ est égal à :

a) $\sqrt{\mathrm{e}^a}$

b) $\dfrac{\mathrm{e}^a}{2}$

c) $\dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^2}$

d) $\mathrm{e}^{\sqrt{a}}$

2 Probabilités — 5 points

Partie A

Dans le magasin d'une grande enseigne spécialisée dans le sport, deux articles sont en tête des ventes en avril : le vélo tout terrain (en abrégé VTT) et le vélo électrique.

Le magasin fait réaliser une enquête afin de satisfaire au mieux ses clients et demande à ceux-ci, s'ils sont sportifs ou simplement des utilisateurs occasionnels.

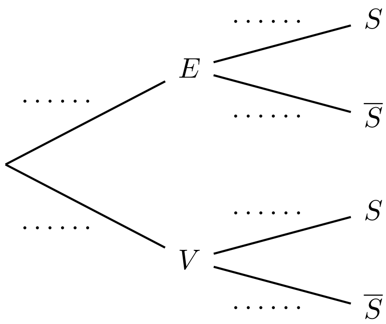
L'enquête a donné les résultats suivants :

- 30 % des vélos achetés sont des VTT.
- Lorsque l'achat est un vélo électrique, 95 % des acheteurs ne sont pas sportifs.
- Lorsque l'achat est un VTT, 70% des acheteurs sont sportifs ;

On s'intéresse à l'achat d'un vélo quelconque dans ce magasin. On note :

- E l'évènement : « le client achète un vélo électrique »
- V l'évènement : « Le client achète un VTT » ;
- S l'évènement : « le client est sportif ».

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités suivant représentant la situation :



2. Quelle est la probabilité qu'un client achète un vélo électrique et soit sportif ?

3. Démontrer que $P(S) = 0,245$.

4. On suppose que le client n'est pas sportif.
Quelle est la probabilité qu'il ait acheté un vélo électrique ? On arrondira le résultat à 10^{-3} près.

Partie B

Sur le site de vente en ligne de l'enseigne on s'aperçoit que la marque premier prix de vélos électriques est souvent mal notée dans les avis de clients.

Pour le service qualité de l'enseigne il y a 1,2% des vélos électriques de cette marque premier prix qui présentent un défaut.

Afin de vérifier la qualité du produit, l'enseigne décide de prélever au hasard, dans un nouvel arrivage de vélos électriques premier prix, un échantillon de 30 vélos électriques premier prix. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On considère la variable aléatoire X qui donne le nombre de vélos électriques premier prix ayant un défaut parmi les 30 prélevés.

1. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.

2. Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux vélos prélevés de l'échantillon aient un défaut. On arrondira le résultat à 10^{-3} près.

3. Déterminer la probabilité pour que au moins l'un des vélos électriques prélevé de cet échantillon présente un défaut. On arrondira le résultat à 10^{-3} près.

3 Suites — 5 points

Une ville dispose de 380 véhicules et propose un système de location mensuelle de ces véhicules.
Au cours du mois de janvier 2021, 280 voitures ont été louées avec ce système de location.
Le responsable constate que chaque mois, 10% des contrats de locations du mois précédent prennent fin, et que 42 nouveaux contrats de location sont signés.
Le responsable de ce système souhaite étudier l'évolution du nombre de locations de véhicules par mois.
Pour cela il modélise le nombre de voitures louées chaque mois par une suite (u_n), où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre de voitures louées le n-ième mois après le mois de janvier 2021.
Ainsi $\boldsymbol{u_0 = 280}$.

1. Déterminer u_1, c'est-à-dire le nombre de voitures qui ont été louées avec ce système de location au cours du mois de février 2021.

2. Justifier que la suite (u_n) vérifie, pour tout entier naturel n, la relation suivante :

$$\boldsymbol{u_{n+1} = 0,9u_n + 42}$$

3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$\boldsymbol{0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 420}$$

4. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier votre réponse.

5. Pour tout entier naturel n, on pose : $\boldsymbol{v_n = u_n - 420}$

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera le premier terme v_0 et la raison.

b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.

c. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$\boldsymbol{u_n = -140 \times 0,9^n + 420}$$

6. Déterminer la limite de la suite (u_n) puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

7. La ville, qui possède initialement 380 véhicules, envisage d'acheter des véhicules supplémentaires pour répondre à la demande.
Le responsable de la ville souhaite prévoir à partir de quelle date le nombre de voitures sera insuffisant.
On souhaite, pour résoudre ce problème, utiliser le programme écrit en Python ci-dessous.
Dans ce programme, la variable `n` désigne le nombre de mois écoulés depuis janvier 2021, et la variable `u` calcule le nombre de véhicules qui seront loués ce mois-là.

```
def v():
    n=0
    u=280
    while ......... :
        n=n+1
        u=.........
    return n
```

a. Recopier et compléter ce programme.

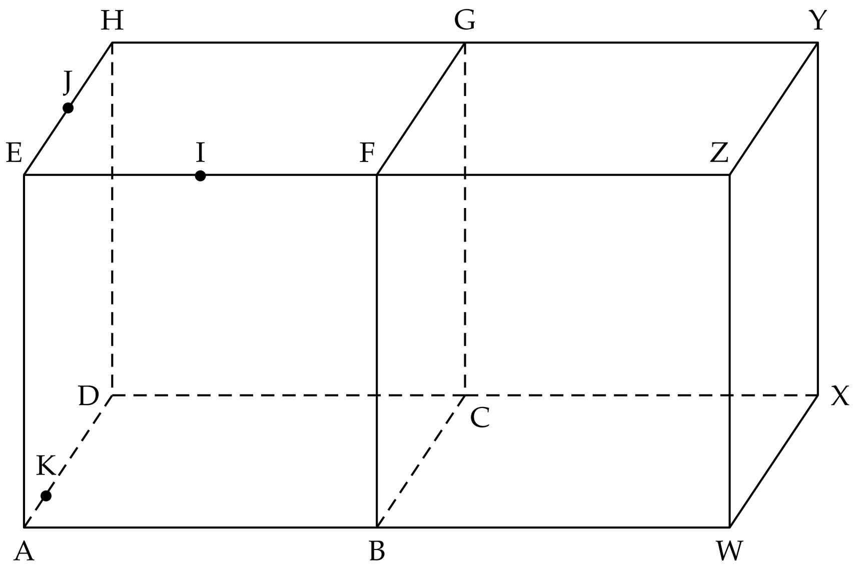
b. Quelle valeur contient la variable n à la fin de l'exécution de ce programme ?

c. En déduire le mois durant lequel la ville devra augmenter son parc de véhicules si elle veut satisfaire la demande.

4 Espace — 4 points

On considère deux cubes identiques d'arête de longueur 1, $ABCDEFGH$ et $BWXCFZYG$, qui ont la face $BCGF$ en commun , comme l'illustre la figure ci-dessous.
On note I le milieu du segment $[EF]$, J le milieu du segment $[EH]$ et K le point du segment $[AD]$ tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.
On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

La figure ci-dessous a été reproduite en annexe en page 6.
On complétera au fur et à mesure cette annexe et on la remettra avec la copie.



Partie A

1. Placer sur la figure jointe en annexe les points $L\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4};1\right)$, $M\left(1;\frac{1}{2};1\right)$, et $N(2;1;1)$.
2. Construire le point R tel que : $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$

Partie B

1. Lire les coordonnées des points B, E, K, H, I et J.

2. **a.** Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EL}$ et $\overrightarrow{EN}$.

b. En déduire que les points E, L et N sont alignés.

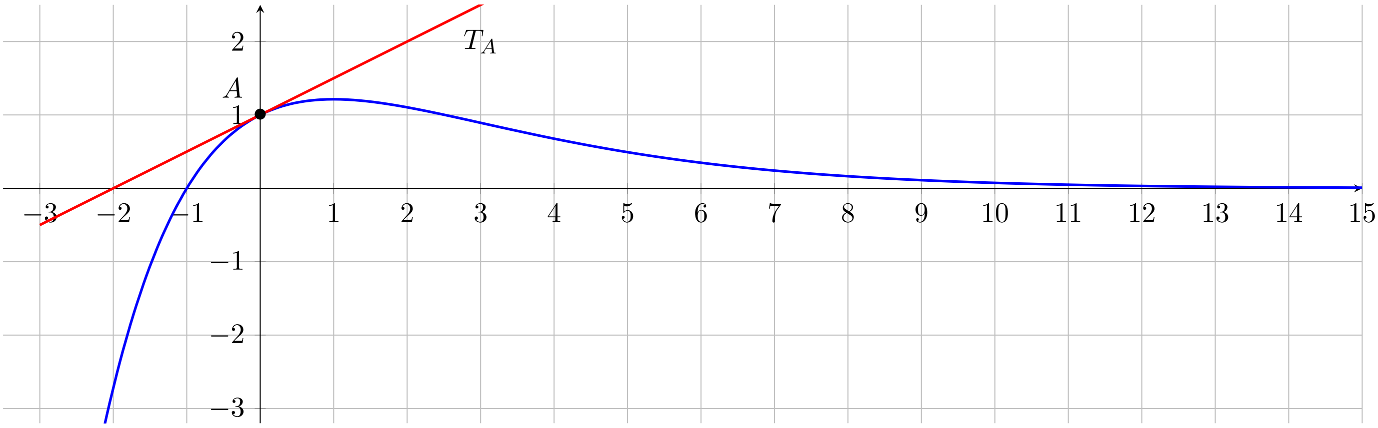
3. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IJ) est $\begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ y = \frac{1}{2}t \\ z = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

4. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (MN) est $\begin{cases} x = 2 + t' \\ y = 1 + \frac{1}{2}t' \\ z = 1 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$

Montrer que les droites (IJ) et (MN) sont sécantes en un point S dont on déterminera les coordonnées.

5 Exponentielle — 5 points

On considere la fonction f definie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe representative C_f est tracée ci-dessous à l'aide d'un logiciel. A désigne le point de la courbe C_f d'abscisse 0 et T_A désigne la tangente à la courbe C_f au point A .



Partie A

1. Conjecturer la limite de $f(x)$ en $+\infty$.
2. Lire $f(0)$.
3. Déterminer graphiquement $f'(0)$
4. En déduire l'équation réduite de la tangente à la courbe C_f au point A.

Partie B

Pour la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est definie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)e^{\frac{-1}{2}x}$$

1. Calculer la limite de la fonction f en $-\infty$.
2. Justifier que pour tout reel x, $$f(x) = 2\left(\frac{\frac{1}{2}x}{e^{\frac{1}{2}x}}\right) + e^{\frac{-1}{2}x}$$
3. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
4. Montrer que pour tout reel x, $$f'(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}(1-x)$$
5. Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et construire son tableau de variations.
6. Demontrer que l'equation $f(x) = 0,11$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
7. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

Annexe à rendre avec la copie

Nom et prénom : .... **Classe : ....**