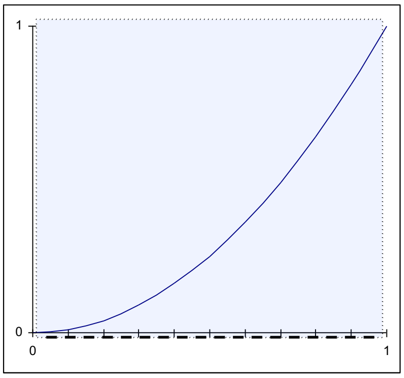
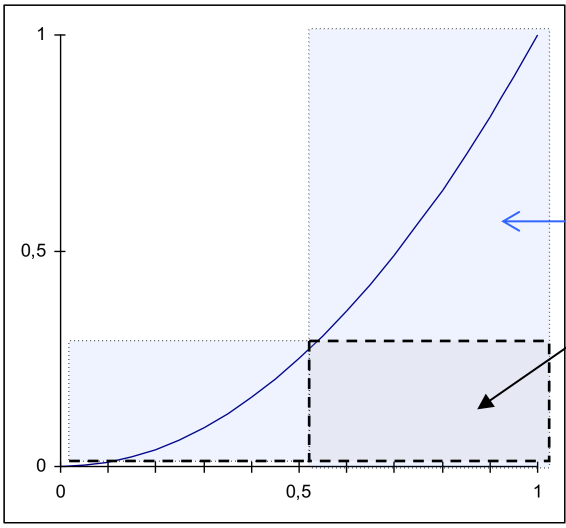
Détermination de l'aire au- dessus et en-dessous de la courbe de la fonction carrée sur l'intervalle [0 ; 1]




$A_1 = 1$

$E_1 = 0$

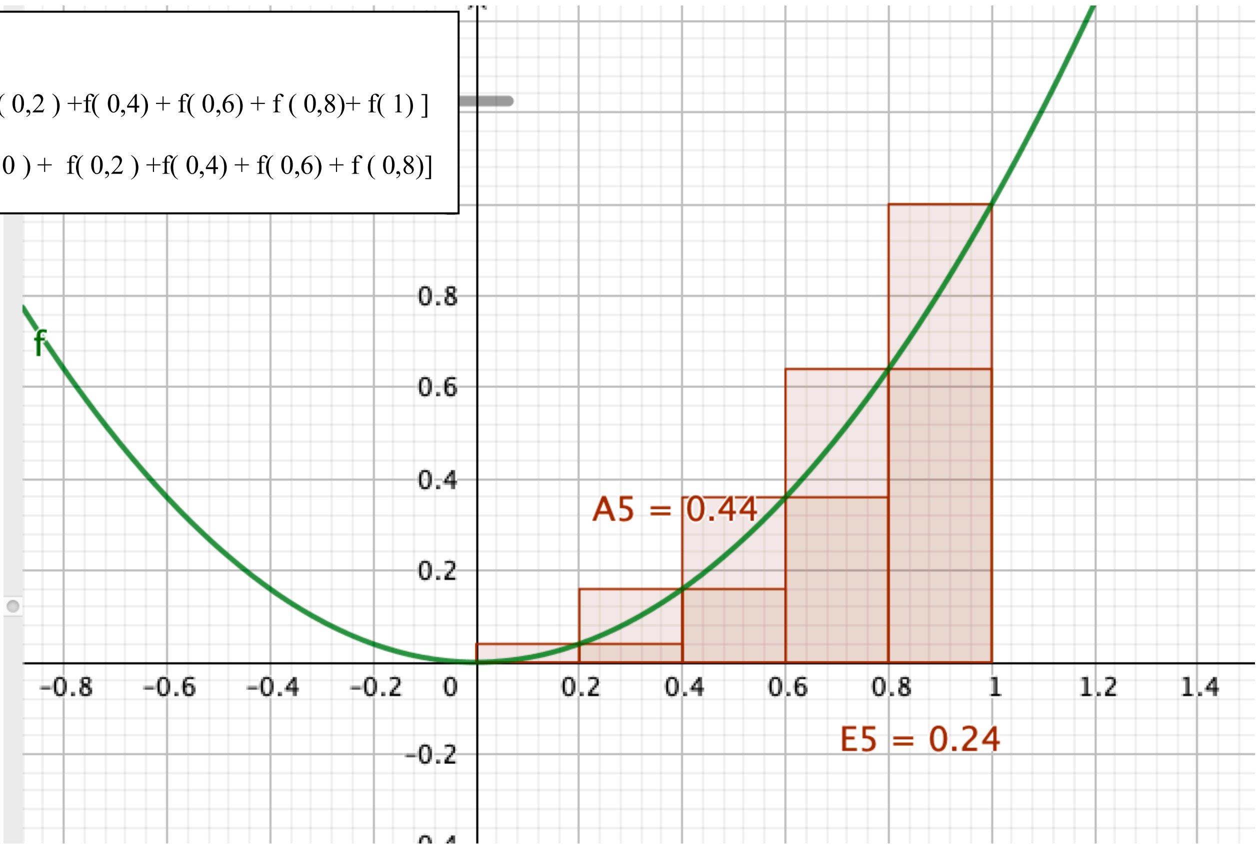


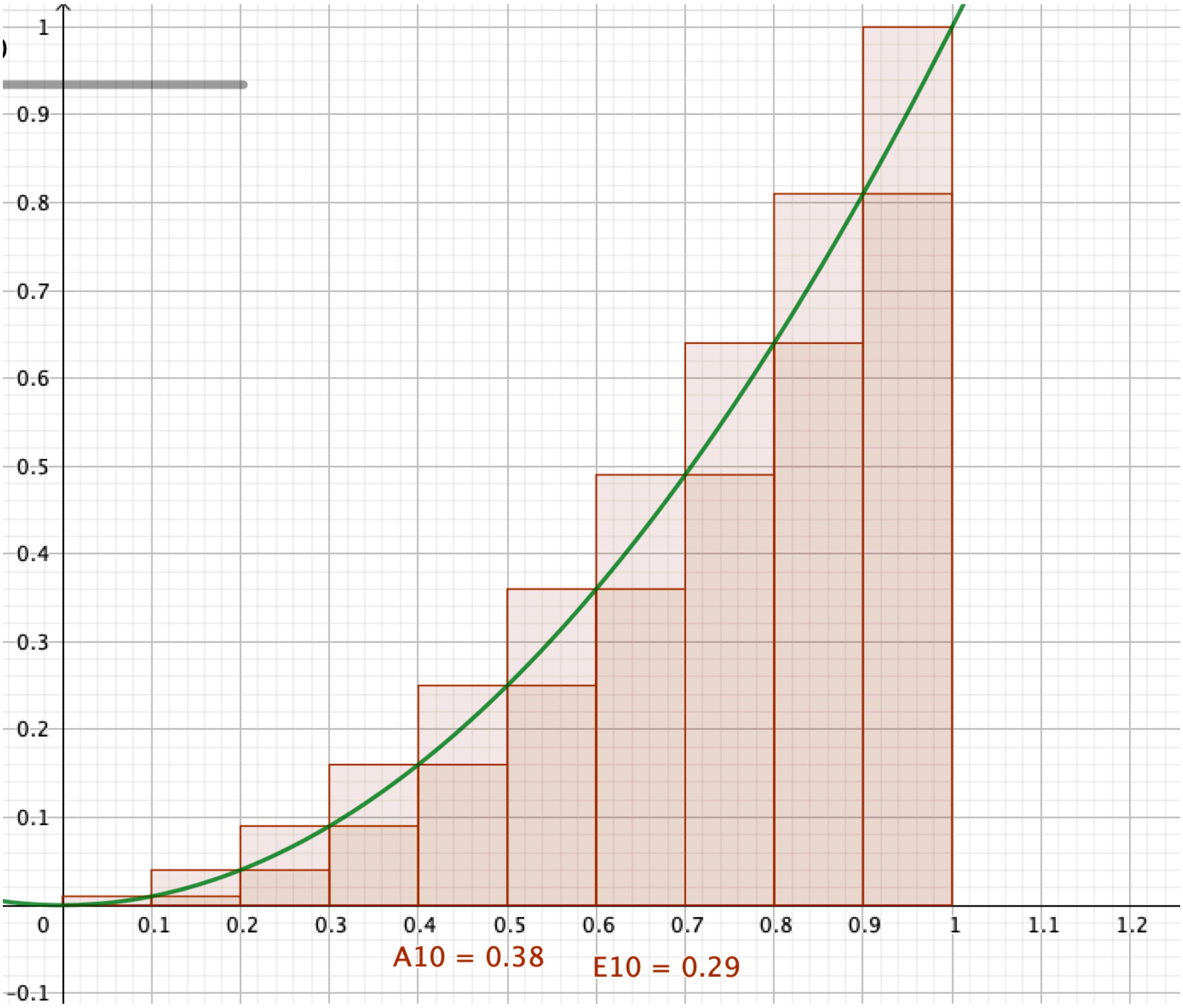

$A_2 = ½ f( ½ ) + ½ f( 1 )$

$E_2 = ½ f( 0 ) + ½ f( ½ )$

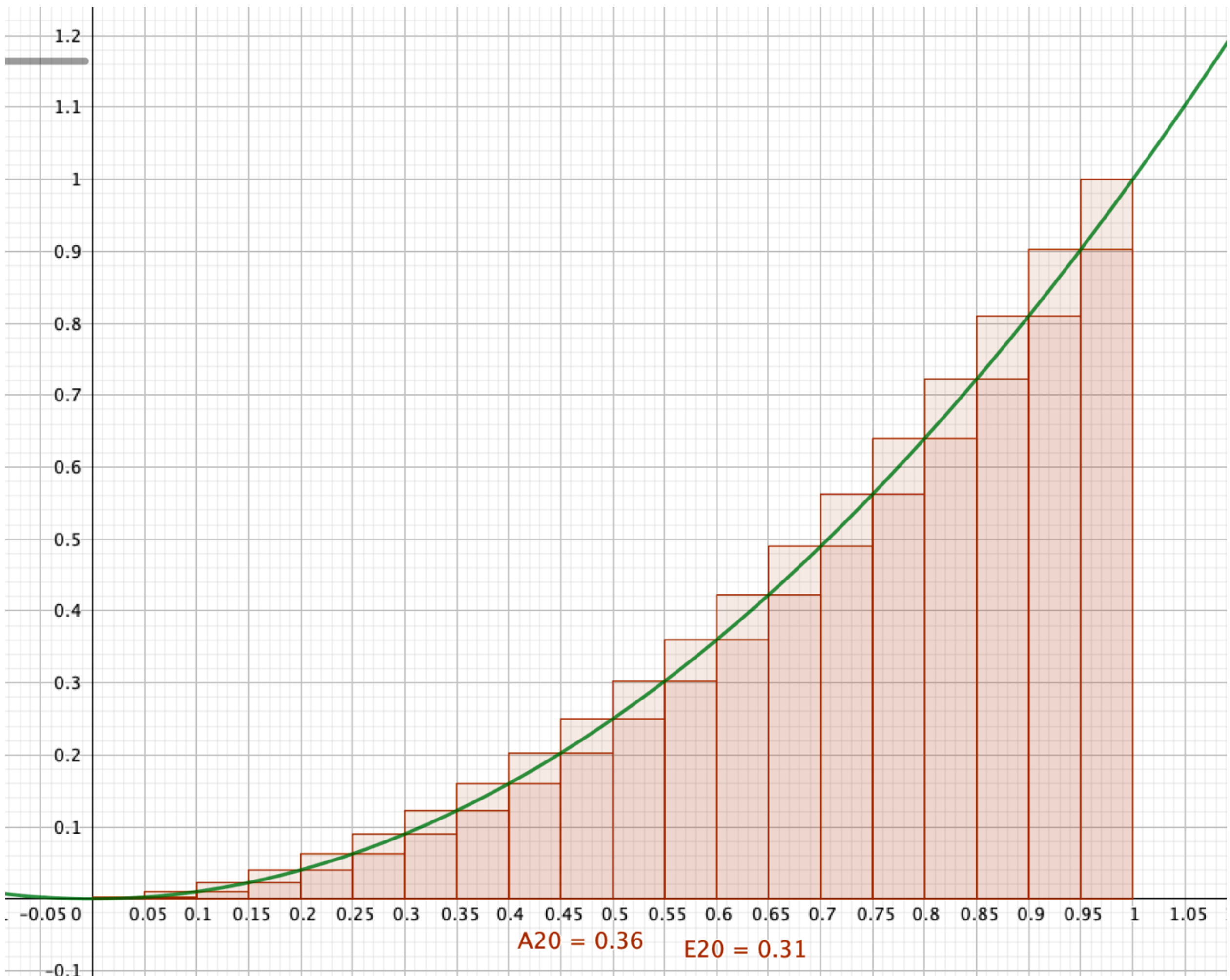
$A_5 = 1/5[\ f( 0,2 ) +f( 0,4) + f( 0,6) + f ( 0,8)+ f( 1) ]$

$E_5 = 1/5[ f( 0 ) + f( 0,2 ) +f( 0,4) + f( 0,6) + f ( 0,8)]$





1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1.1
1.2
A10 = 0.38
E10 = 0.29




## GENERALISATION

$$An = \frac{1}{n}\left[\ f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f(1)\ \right] = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \ldots + \frac{n^2}{n^2}\right)$$

$$A_n = \frac{1}{n^3}\left(1 + 4 + \ldots + n^2\right) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$ ( voir cours sur la récurrence )

$$En = \frac{1}{n}\left[\ f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\ \right] = A_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

On démontre que (An) décroissante et (En) croissante avec lim ( An - En ) = 0 donc elles sont adjacentes et lim An = lim En =1/3 .

L'aire cherchée est donc 1/3 en unités d'aires.

ALGO :

```
Saisir N
A←0
Pour I← 1 à N

A←A + I²/N³

Fin pour

E ← A - 1/N
Afficher E, A
```