DISTANCES DANS UN REPERE ORTHONORME

I) Distance entre deux points

Théorème 2

On munit le plan d'un repère orthonormé (O, I, J)

La distance AB entre deux points A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) est telle que :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

DEMONSTRATION P 220

Exemple :

On se place dans un repère orthonormé (O, I, J) A(5 ;3) et B(-1 ; 2).

Alors $AB = \sqrt{(-1-5)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{37}$

Remarque : $OA = \sqrt{(x_A)^2 + (y_A)^2}$

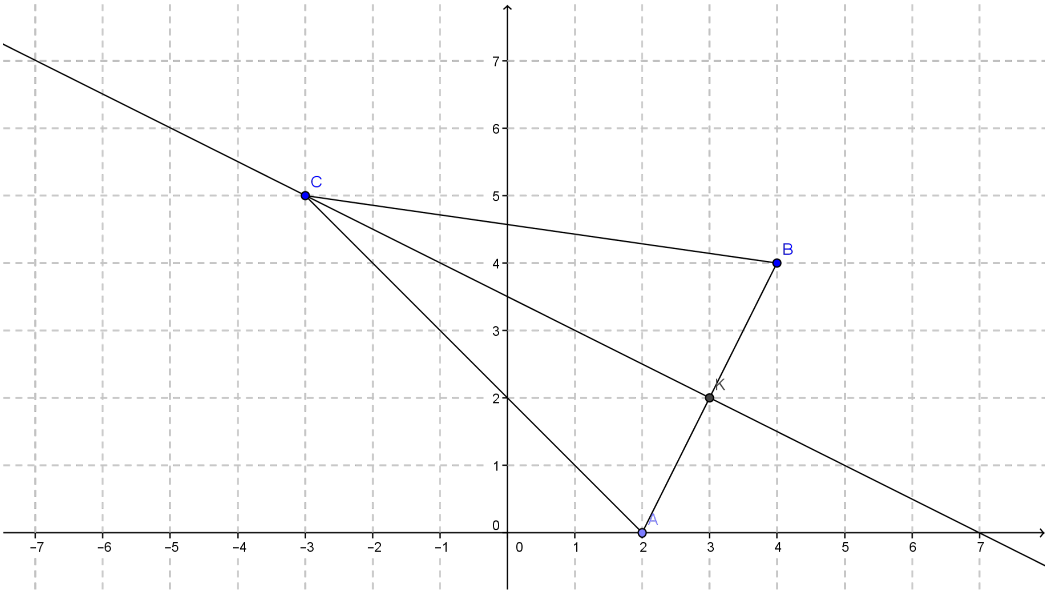
II) Utiliser des calculs de distances

Dans la suite le repère (O, I , J) est orthonormé

1°) Savoir démontrer qu'une droite est une médiatrice

Soient A (2; 0), B(4; 4) et C (-3; 5).

Démontrer que C est un point de la médiatrice de [AB]



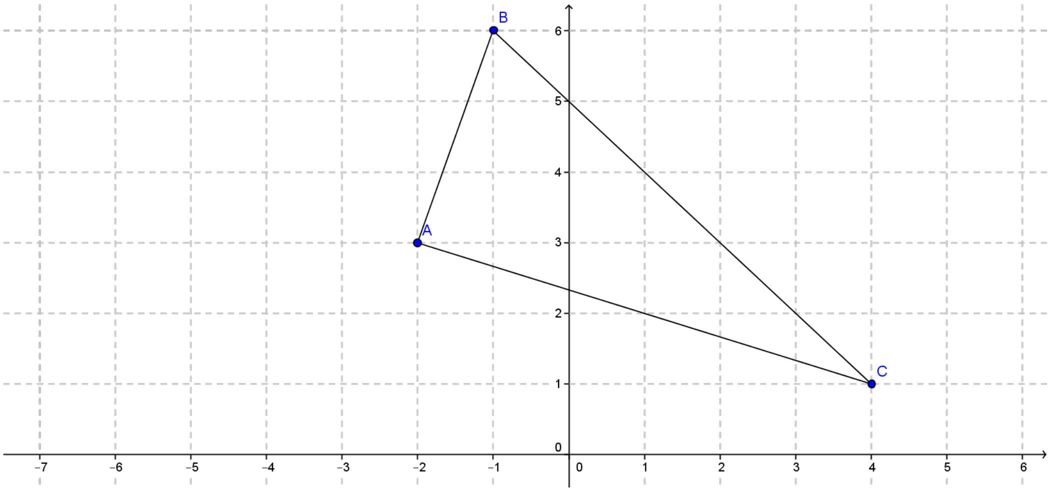
$AC = \sqrt{(-3-2)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \sqrt{50}$

$BC = \sqrt{(4-(-3))^2 + (5-4)^2} = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$

Comme AC = BC le point C est équidistant des extrémités du segment [AB], il appartient bien à la médiatrice de [AB].

2°) DISTANCES ET TRIANGLES

Exemple 1 : Soient A(-2; 3), B(-1;6) et C (4; 1). Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.



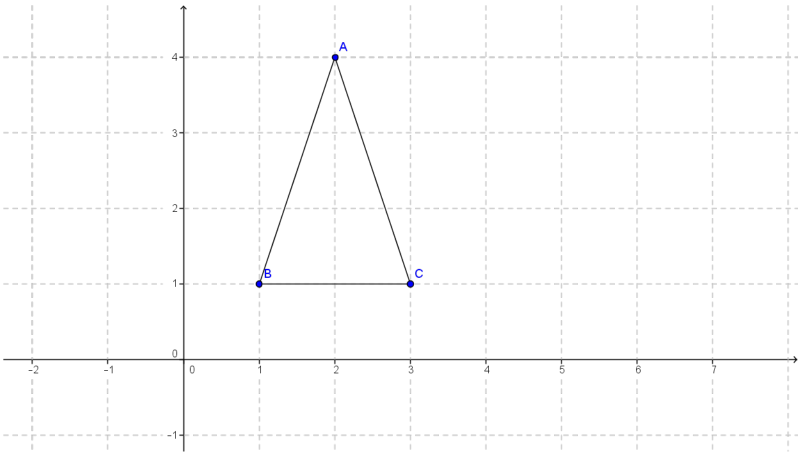
$$AB = \sqrt{(-1-(-2))^2 + (6-3)^2} = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$$

$$AC = \sqrt{(4-(-2))^2 + (1-3)^2} = \sqrt{6^2+2^2} = \sqrt{40}$$

$$BC = \sqrt{(4-(-1))^2 + (1-6)^2} = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50}$$

$AB^2 + AC^2 = BC^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle ABC est rectangle en A.

Exemple 2 : Soient A(2; 4), B(1;1) et C (3 ; 1). Démontrer que le triangle ABC est isocèle en A.

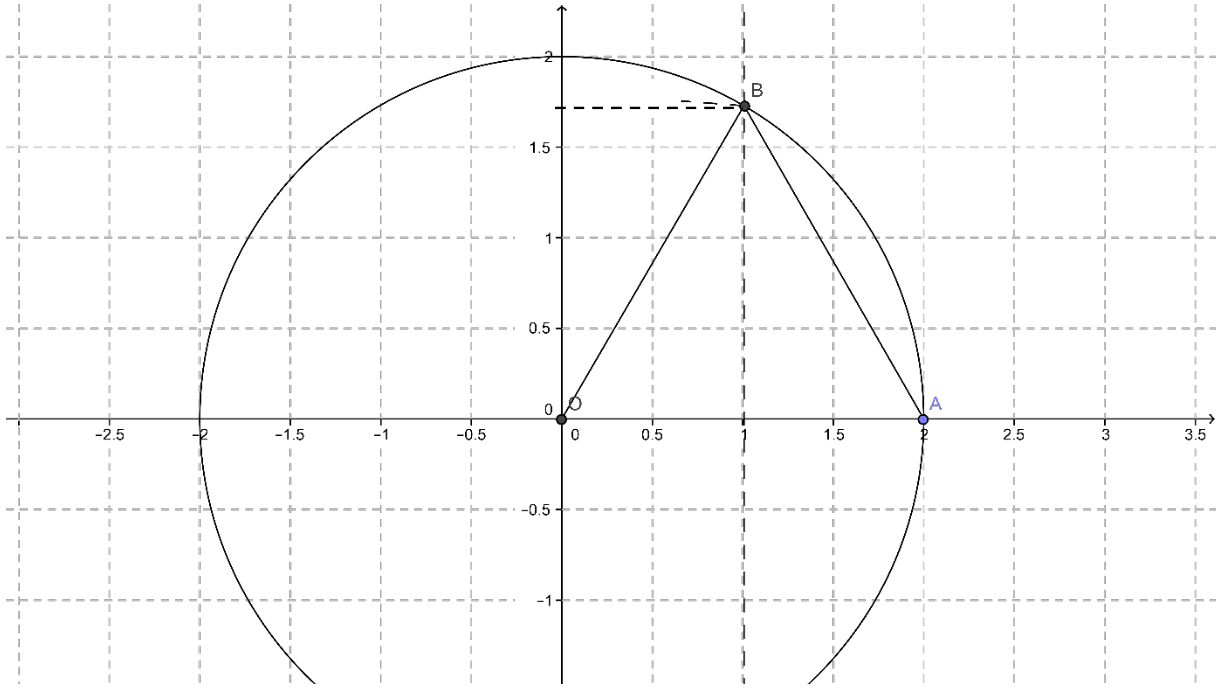


$$AB = \sqrt{(1-2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$$

$$AC = \sqrt{(3-2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$$

Comme AB = AC le triangle est isocèle en A.

Exemple 3 : Soient A(2; 0), B(1; √ 3). Démontrer que le triangle OAB est équilatéral.



OA $=\sqrt{(2)^2} = 2$

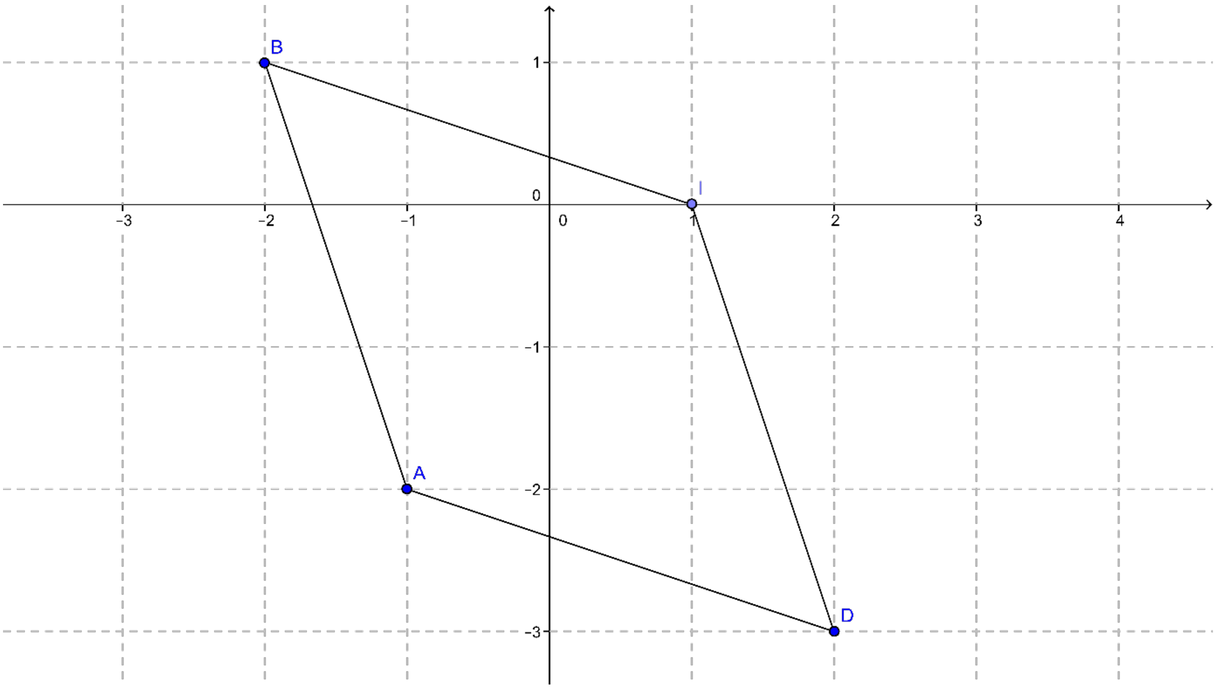
OB $= \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = 2$

AB $= \sqrt{(1-2)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$

Comme OA = OB = AB le triangle AOB est équilatéral.

3°)DISTANCES ET QUADRILATERES

Soient A(-1; -2), B(-2;1) I (1; 0) et D(2;-3). Placer les points dans un repère. Quelle semble être la nature du quadrilatère ABID ? Le démontrer



On démontre d'abord que ABID est un parallélogramme

Le milieu de la diagonale [BD] a pour coordonnées $\left(\frac{-2+2}{2};\frac{1-3}{2}\right)$ soit (0 ; -1)

Le milieu de la diagonale [AI] a pour coordonnées $\left(\frac{-1+1}{2};\frac{-2}{2}\right)$ soit (0 ; -1)

Les deux diagonales du quadrilatère ABID ont le même milieu, le quadrilatère ABID est donc un parallélogramme.

On démontre alors que ABID est un losange

De plus

AB = $\sqrt{(-2-(-1))^2+(1-(-2))^2} = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$

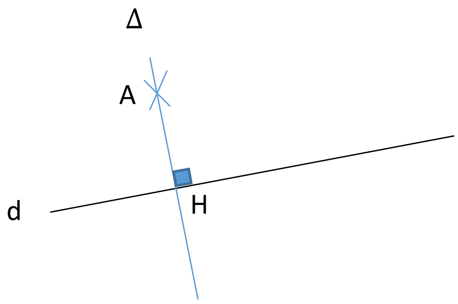
BI = $\sqrt{(1-(-2))^2+(0-1)^2} = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$

Donc AB=BI, ABID est ainsi un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur , c'est un losange.

III) Projection orthogonale

Définition

A est un point du plan et d est une droite.



Le point d'intersection H de d

et de la perpendiculaire Δ à d passant par A

est **le projeté orthogonal de A sur d.**

Propriété

Le projeté orthogonal H du point A sur la droite d est le point de d le plus proche de A.
Voir Démonstration p

Définition

La longueur AH s'appelle la distance du point A à la droite d.

Exemple

On considère les points A(-1 ;4) B(-2 ;-3) et C(3 ;1). On admet que I est le pied de la hauteur issue de A. Déterminer la distance de A à (BC)