Equations et inéquations du premier degré. Signe de a x +b

- $\boxed{(a \neq 0) \quad a x + b = 0 \quad \text{équivaut à} \quad x = -b/a.}$

Ex : Résoudre dans R l'équation $-3x + 4 = 0$. S = { 4/3}

-

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
a x + b		signe(-a)	0	signe(a)	

Ex : Donner à l'aide d'un tableau le signe sur R en fonction de x de :

a) $2x - 1$

x	$-\infty$		1/2		$+\infty$
$2x - 1$		-	0	+	

b) $-3x + 5$

x	$-\infty$		5/3		$+\infty$
$-3x + 5$		+	0	-	

- **A. B = 0 équivaut à** A = 0 ou à B = 0

- **<u>REGLE DES SIGNES</u>**

x

+	+	+
–	–	+
–	+	–
+	–	–

- **<u>Identités remarquables</u>**.

ATTENTION : ne pas écrire ax^2 en pensant à $(ax)^2$ car $\mathbf{(ax)^2 = a^2 x^2}$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$(ax + b)^2 = (ax)^2 + 2.(ax)b + b^2 = a^2x^2 + 2.a.b.x + b^2$

$(ax - b)^2 = (ax)^2 - 2.(ax)b + b^2 = a^2x^2 - 2.a.b.x + b^2$

$(ax + b)(ax - b) = (ax)^2 - b^2 = a^2x^2 - b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3.a^2b + 3.ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3.a^2b + 3.ab^2 - b^3$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

- **<u>Valeur absolue</u>**

$$|x| = \begin{cases} \mathbf{x \quad si \quad x \geq 0} \\ \mathbf{-x \quad si \quad x \leq 0} \end{cases}$$

$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ équivaut à $\mathbf{a = b}$ ou $\mathbf{a = -b}$

Si a >0

$|x| \leq a$ équivaut à x dans $[-a ; a]$

$|x| \geq a$ équivaut à x dans $]-\infty ; -a] \cup [a ; +\infty[$.

Equations et inéquations du second degré. Signe de $ax^2 + bx + c$

I) Equations du second degré.

1°)Généralités

Définition 1

Une équation du second degré est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a,b,c sont des réels donnés avec **$a \neq 0$.**

Exemples :

$3x^2 + 5x + 4 = 0$ a= 3, b = 5 , c = 4

$x^2 - 2x - 7 = 0$ a= 1, b = -2 , c = -7.

Remarque : Il n'y a « rien » devant x^2 , le « 1 » est « caché » ou sous – entendu puisque $1 \times x^2 = x^2$!

Attention : $(x + 2)^2 = x^2 + x + 1$ n'est pas une équation du second degré.

En effet si on développe le terme de droite à savoir $(x + 1)^2$ on obtient l'équation équivalente suivante

$x^2 + 4x + 4 = x^2 + x + 1$ soit $3x + 3 = 0$ qui est une équation du premier degré qui admet – 1 pour solution.

Définition 2:

a,b,c 3 réels donnés ($a \neq 0$).La fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to ax^2 + bx + c$ est appelée ***fonction trinôme du second degré***.

2°) Résolution et factorisation.

a)La forme canonique

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. On démontre que (voir partie exercices)

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Cette écriture est la ***forme canonique*** du trinôme.

Définition 3 :Le réel $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$. On peut alors écrire :

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Exemples : $x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$

$$4x^2 - x + 3 = 4\left[\left(x - \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{48}{64}\right]$$

b)Résolution et factorisation . Grâce à la forme canonique on démontre le théorème suivant :

Théorème 1(résolution)

a,b,c étant des réels tels que $a\neq 0$, on considère l'équation (E) $ax^2+bx + c =0$ et le discriminant $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$.

- **Si $\underline{\Delta>0}$** (E) admet deux solutions distinctes ds |R :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- **Si $\underline{\Delta= 0}$** (E) admet une seule solution ds |R : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$

- **Si $\underline{\Delta< 0}$ (E) n'admet pas de solutions dans |R.**

Exemples : Résoudre dans |R

$3x^2 + 2x -1 = 0$	$16x^2 + 8x +1 = 0$	$-x^2 + x -1 = 0$
$\Delta= (2)^2 - 4\times3\times(-1)=4+12=16$ S={-1 ; 1/3 }	$\Delta= 0$	$\Delta= - 3$
$x_1=\dfrac{- 2 + 4}{6} = \dfrac{1}{3}$	$x_0 = - ¼$	Pas de solution dans R
$x_2=\dfrac{-2 - 4}{6} = -1$	S={-1/4}	S=∅

Cas particulier : Lorsque le trinôme est incomplet on peut résoudre l'équation sans utiliser Δ.

a) (b = 0) $4x^2 - 1 = 0$	b) $x^2 + 2 = 0$	c) (c = 0) $2x^2 + x = 0$.
$x^2 = ¼$	$x^2= -2$ or pour tout réel x	On factorise par x d'où
$x = - ½$ ou $x = ½$	$x^2 \geq 0$ donc	$x\ (2x + 1) =0$
S={- ½ ; ½ }	S=∅	S={- ½ ; 0 }

Remarque 1: Ne jamais perdre de vue que c'est la variable x que l'on cherche et que dans le discriminant la variable x n'apparaît pas !

Remarque 2 : Pour aller plus vite

Regardons l'équation $x^2 + 2x – 3 =0$. Si on remplace x par 1 on obtient 1 + 2 – 3 = 0 ce qui montre que 1 est solution de l'équation. On dit que 1 est solution évidente , l'autre solution est alors donnée par le quotient c/a c'est – à dire ici –3/1 = -3. Sans calculer de discriminant on a donc obtenu les deux x solutions.

On a :

Si a + b + c = 0	Si a - b + c = 0
1 solution évidente et $\dfrac{c}{a}$ est l'autre solution	-1 solution évidente et $-\dfrac{c}{a}$ est l'autre solution

Exercice 3: Résoudre dans |R les équations suivantes

a) $x^2 + x - 6 = 0$

$\Delta = (1)^2 - 4\times1\times(-6)=1+24=25$

$x_1 = \dfrac{-1+5}{2} = 2$ $x_2 = \dfrac{-1-5}{2} = -3$

S = { -3 ; 2 }

b) $x^2 - 5x + 4 = 0$

1 – 5 + 4 = 0 donc 1 solution évidente et 4 est l'autre solution

S = { 1 ; 4 }

C) $3x^2 + x - 1 = 0$

$\Delta = 13$

S = { $(-1 - \sqrt{13}) / 6$; $(-1 + \sqrt{13})/ 6$ }

c) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

$\Delta = 0$

S = { -1/3}

e) $x^2 + 2x - 1 = 0$

$\Delta = 8$

S = { $-1 - \sqrt{2}$; $-1 + \sqrt{2}$ }

f) $x^2 + x + 1 = 0$

$\Delta = -3$

S = Ø

g) $3x^2 + 2x = 0$

x(3x + 2) = 0

S = { -2/3; 0}

h) $3x^2 - 1 = 0$

S = { $-1/\sqrt{3}$;$1/\sqrt{3}$}

i) $5x^2 + 2 = 0$

S =Ø

j) $-15x^2 - 10x + 5 = 0$

-1 solution évidente , l'autre solution est 5/15 càd 1/3

S = { -1 ; 1/3}

k) $\frac{1}{2} x^2 - 5x - 7 = 0$

$\Delta = 165$

S = { $5 - \sqrt{165}$; $5 + \sqrt{165}$}

l) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ (*)

équivaut à résoudre le système $\begin{cases} X = x^2 \\ X^2 - 3X + 2 \text{ (E)} \end{cases}$

(il s'agit d'une équation bicarrée on effectue un changement de variable pour la résoudre)

1 racine évidente de (E) donc le système équivaut à

X = 1 ou X = 2 puisque l'autre solution est 2

Soit $x^2 = 1$ ou $x^2 = 2$

D'où S = { $-\sqrt{2}$; -1 ; 1 ; $\sqrt{2}$}

Théorème 1 bis (factorisation) $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et avec les notations du théorème 1.

- Si $\Delta > 0$: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
- Si $\Delta = 0$: $f(x) = a(x - x_0)^2$
- Si $\Delta < 0$: $f(x)$ n'est pas factorisable dans |R en produit de facteurs du premier degré.

Remarques : 1) On appelle racines du trinôme toute solution de l'équation (E).Si $\Delta = 0$ on dit racine double.
2) Savoir programmer sa calculatrice.

Exemples : Donner lorsque c'est possible une factorisation des trinômes suivants

1) $f(x)=x^2 - 3x + 2$ 2) $g(x)= 5x^2 + 8x + 3$ 3) $h(x)= 9x^2 + 6x + 1$ 4) $p(x)= x^2 - 2x + 3$

$f(x)=x^2 - 3x + 2$	$g(x)= 5x^2 + 8x + 3$	$h(x)= 9x^2 + 6x + 1$	$p(x)= x^2 - 2x + 3$
$\Delta= (-3)^2 - 4\times1\times(2)=9-8=1$ $x_1= 1$ $x_2 = 2$ $f(x)=(x - 1)(x - 2)$	$\Delta= 4$ $x_1= -1$ $x_2 = -3/5$ $g(x)=5(x+3/5)(x+1)=(5x + 3)(x+1)$	$\Delta= 0$ $x_0= - 1/3$ $h(x)=9(x+1/3)^2$	$\Delta= -8$ $p(x)$ n'est pas factorisable dans |R en produit de facteurs du premier degré.

II) Signe du trinôme. Inéquations du second degré

1°) Signe du trinôme

Théorème 2

$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$ le discriminant de f.

- **Si $\Delta>0$**

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de $f(x)$		sg(a)	0	sg(-a)	0	sg(a)	

(en supposant par exemple ici que $x_1 < x_2$ sinon on aurait x_2 avant x_1 dans le tableau)

- Si $\Delta= 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		sg(a)	0	sg(a)	

- Si $\Delta< 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		sg(a)	

Remarque : en clair si $\Delta>0$: … **et si a positif** (rappel : **a** est **le nombre « qui est devant x^2 »**) alors

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $f(x)$		+	0	$-$	0	+	

…Et si a négatif

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	+	0	$-$	

Exemples :

$f(x)= x^2 + 2x -3$	$g(x)= 4x^2 + 4x +1$	$h(x)= - x^2 + 5x + 6$	$I(x)= -2x^2 + 5x + 8$
a = 1 donc c'est le cas où a positif $\Delta = 16$ $x_1= -3$ $x_2= 1$ ici – 3 < 1 donc x : $-\infty$; -3 ; 1 ; $+\infty$ $f(x)$: + 0 - 0 +	a = 4 donc c'est le cas où a positif $\Delta = 0$ $x_0 = -\frac{1}{2}$ x : $-\infty$; $-\frac{1}{2}$; $+\infty$ $f(x)$: + 0 +	a = -1 donc c'est le cas où a négatif $\Delta = 49$ $x_1= 6$ $x_2= -1$ ici – 1 < 6 donc x : $-\infty$; -1 ; 6 ; $+\infty$ $f(x)$: - 0 + 0 -	a = -2 donc c'est le cas où a négatif $\Delta = - 39$ x : $-\infty$; $+\infty$ $f(x)$: -

2°) Résolution d'inéquations.

a) Méthode : étape 1 : on étudie le signe du trinôme donné dans un tableau d'après le théorème sur le signe du trinôme
étape 2 : En lisant le tableau on peut alors résoudre l'inéquation.

b)Exemples :

Résoudre dans |R les inéquations suivantes :

$x^2 + 2x -3 \geq 0$	$4x^2 + 4x +1>0$	$- x^2 + 5x + 6 > 0$	$-2x^2 + 5x + 8 \geq 0$
On effectue l'étude ci – dessus Et on a S =] $-\infty$;-3] U[1;$+\infty$[	On effectue l'étude ci – dessus Et on a S =R\{0}=R^* .	On effectue l'étude ci – dessus Et on a S =]-1 ;6[	On effectue l'étude ci – dessus Et on a S =Ø

III)Représentation graphique et interprétation.

Dans la suite le plan est rapporté à un repère (O, i , j).

1°) Représentation graphique du trinôme.

Propriété et Définition

La représentation graphique du trinôme du second degré f est ***une parabole***
de ***sommet*** le point $S\left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ et ***d'axe de symétrie*** la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$

EQUATION DE LA PARABOLE DANS LE REPERE ORTHONORMAL (O, i,j)

$$y = a\,(x + b/2a)^2 - \Delta/4a$$

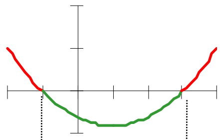
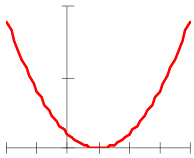
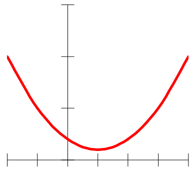
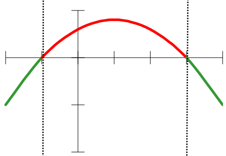
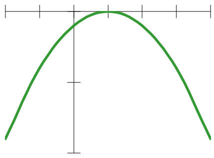
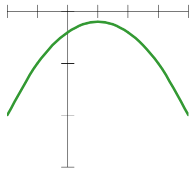
REMARQUES

1°) **Si $\Delta>0$, P coupe l'axe (O,i) aux x points d'abscisses x_1 et x_2 qui sont les racines du trinôme.**

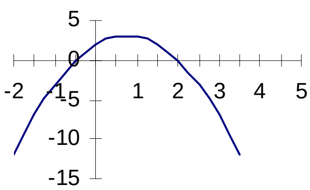
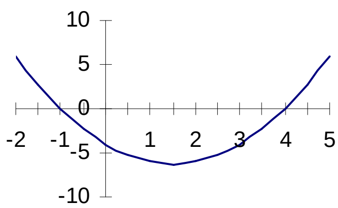
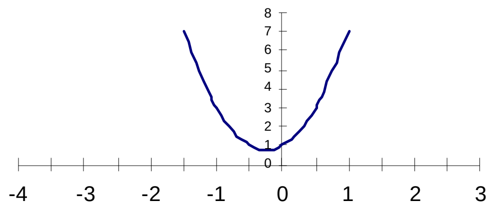
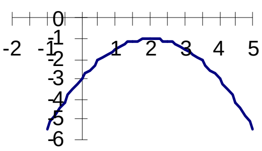
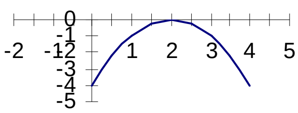
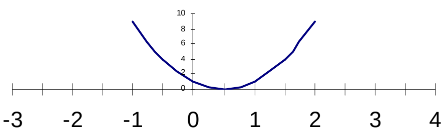
2°) Le point **C(0,c)** est le **point d'intersection de P avec l'axe (O,j).**

2°) Interprétation graphique

On suppose ici que $x_1<x_2$ si $\Delta>0$

	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
COURBE avec $a>0$ « courbe à l'endroit »	 x_1 x_2	 x_0	
SIGNE	+ 0 - 0 +	+ 0 +	+
COURBE avec $a<0$ « courbe à l'envers »			
SIGNE	- 0 + 0 -	- 0 -	-

Exercices : Donner dans chaque cas le signe du trinôme f(x) à l'aide de sa courbe.

 a -1 2 - 0 + 0 -	 b -1 4 + 0 - 0 +	 C +
 d - 	 e 2 - 0 -	 f 0.5 + 0 +